

I-36 サブパラメトリック帯板要素による平面応力解析

長岡技術科学大学大学院 学生員 渡辺 力
 長岡技術科学大学工学部 正会員 林 正
 長 瀬 産 業 （株） 小嶋浩和

1. まえがき

本報告では、有限帯板法による平面応力解析についての新しい解法として、任意形状のサブパラメトリック帯板要素を提案する。任意な形状を定めるために写像変換の手法を用いるが、この手法によって定義される曲線座標系では、従来の帯板要素の形状関数に用いられている三角関数の直交性が失われるためにその利点なくなり、また、数値積分において必要な積分点の数が明確でない上に、積分点数が不足した場合に多項式に比べて解に及ぼす影響が大きいので、三角関数の代わりに多項式による級数を求める。

そこで、数値積分に適した多項式を求めるために、境界条件を満たす一般的な多項式の基本関数系を考えて、式中に含まれる任意定数に種々の値を与えることによって高次モードの形状が全く異なる多項式を導く手法を用いる。本文では、代表的な3つの境界条件に対する関数系を求めるが、平面応力解析において一端固定・他端自由の境界条件に対する級数は過去に提案されていない。

2. サブパラメトリック帯板要素

(1) 親要素：親要素の中央面はデカルト座標の $x-y$ 平面上にあるものとし、要素座標系として区間 $[-1, 1]$ で定義される正規曲線座標系 (ξ, η) を用いる。これを写像変換するために、図-1に示すように要素の隅角点と辺上の中点に合計8個の節点を設ける。また、 $\eta = \pm 1$ で i, j 節線、 $\eta = 0$ で k 節線をもつものとする。

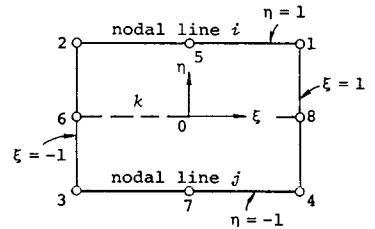


図-1 親要素

(2) 変位関数：親要素内の ξ, η 方向の変位の2成分 u, v を次式で表わす。

$$u = \sum_{m=1}^3 U_m \{f_1 u_{1m} + f_2 u_{2m} + f_3 u_{3m}\}, \quad v = \sum_{m=1}^3 V_m \{f_1 v_{1m} + f_2 v_{2m} + f_3 v_{3m}\} \quad (1)$$

ここに、 u_{1m}, v_{1m} , etc. は各節線での一般化変位の第 m 項、 U_m, V_m は3.で説明する展開関数、 f_1 は次式で与えられる形状関数である。

$$f_1(\eta) = \eta(\eta+1)/2, \quad f_2(\eta) = \eta(\eta-1)/2, \quad f_3(\eta) = 1-\eta^2 \quad (2)$$

第 m 項の一般化変位をまとめて6次の列ベクトル $\mathbf{d}_m$ で表し、これに対応する形状関数ベクトルを $\mathbf{f}_1$ で表わして式(1)を次式のようにおく。ここに、 T は転置記号である。

$$\left. \begin{aligned} u &= \sum_{m=1}^3 U_m \mathbf{f}_1^T \mathbf{d}_m \\ v &= \sum_{m=1}^3 V_m \mathbf{f}_2^T \mathbf{d}_m \end{aligned} \right\} \quad (3) \quad \left. \begin{aligned} \mathbf{d}_m &= \{u_{1m}, v_{1m}, u_{2m}, v_{2m}, u_{3m}, v_{3m}\}^T \\ \mathbf{f}_1 &= \{f_1, 0, f_2, 0, f_3, 0\}^T, \quad \mathbf{f}_2 = \{0, f_1, 0, f_2, 0, f_3\}^T \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

(3) ひずみ成分：8節点のセレンディビティ要素の形状関数を用いて有限要素法と同じパラメータ写像の手法を用いる。このために、ヤコビ行列 $\mathbf{J}$ とその逆行列を次式のようにおく。

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \xi}, \frac{\partial}{\partial \eta} \right\} = [\mathbf{J}] \left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\} \quad (5) \quad \mathbf{J}^{-1} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} \\ I_{21} & I_{22} \end{bmatrix} \quad (6)$$

平面応力解析におけるひずみの3成分 $\mathbf{e}_i$ に式(3)、(5)を用いて次式のように表す。

$$\mathbf{e} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}\}^T \equiv \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}^T, \quad \mathbf{e}_i = \sum_{m=1}^3 \mathbf{b}_{im}^T \mathbf{d}_m \quad (i=1, 2, 3) \quad (7)$$

ここに、ひずみベクトル $\mathbf{b}_{im}$ は次式で与えられる。ブライムは ξ に関する微分を表す。

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{b}_{1m} &= I_{11} U_m' \mathbf{f}_1 + I_{12} U_m \mathbf{g}_1, & \mathbf{b}_{2m} &= I_{21} V_m' \mathbf{f}_2 + I_{22} V_m \mathbf{g}_2 \\ \mathbf{b}_{3m} &= I_{21} U_m' \mathbf{f}_1 + I_{22} U_m \mathbf{g}_1 + I_{11} V_m' \mathbf{f}_2 + I_{12} V_m \mathbf{g}_2, & \mathbf{g}_i &= d\mathbf{f}_i/d\eta \quad (i=1, 2) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

(4) 平衡方程式：平衡方程式は通常の帯板法と同じ方法で求められる。

$$\sum_{n=1}^N [\mathbf{K}_{mn}] \mathbf{d}_n = \mathbf{q}_m + \mathbf{p}_m \quad (m=1, 2, \dots) \quad (9)$$

ここに、 $\mathbf{K}_{mn}$ は帯板要素の剛性行列の第 (m, n) 小行列、 $\mathbf{q}_m$ は一般化変位 $\mathbf{d}_m$ に対する一般化力、 $\mathbf{p}_m$ は等価

節線荷重ベクトルの第 m 項で、 $\eta = \eta_0$ の線上に沿って分布する線荷重については次のようになる。

$$K_{mn} = Et / (1 - \nu^2) \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [b_{1m} b_{1n}^T + b_{2m} b_{2n}^T + \nu b_{1m} b_{2n}^T + \nu b_{2m} b_{1n}^T + \lambda b_{3m} b_{3n}^T] |J| d\xi d\eta$$

$$P_m = \int_S \{ p_x U_m f_1(\eta_0) + p_y V_m f_2(\eta_0) \} J_\xi d\xi, \quad J_\xi = \sqrt{J_{11}^2 + J_{12}^2}, \quad \lambda = (1 - \nu)/2 \quad (10)$$

数値計算では計算効率を上げるために、式(9)を全項数について集めた式から u_{km} 、 v_{km} を消去する。

3. 展開関数

(1) 基本関数系 : 従来の帯板法では式(1)の展開関数 U_m 、 V_m に次の三角関数を用いられていた。

$$\begin{aligned} \text{両端固定支持: } U_m(\xi) &= \sin \alpha_{m+1} \xi, \quad V_m(\xi) = \sin \alpha_m \xi \quad \left(\alpha_m = m\pi \right. \\ \text{両端単純支持: } U_m(\xi) &= \cos \alpha_m \xi, \quad V_m(\xi) = \sin \alpha_m \xi \quad \left. \xi = (1 + \xi)/2 \quad (0 \leq \xi \leq 1) \right) \end{aligned} \quad (11)$$

本文では多項式による級数を用いる。この級数の一般形として次の基本関数系 $\{X_m(\xi)\}$ を考える。

$$X_m(\xi) = F(\xi) \sum_{i=1}^m a_{m,i-1} \xi^{i-1} \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (12)$$

ここに、 $F(\xi)$ は両端の境界条件を満たす多項式、 $a_{m,i-1}$ は任意定数である。

(2) 両端固定支持 : $F(\xi)$ には、両端($\xi = \pm 1$)での拘束境界条件 $u = v = 0$ を満たす多項式を用いる。任意定数 $a_{m,i-1}$ に種々の値を与えることによってモードの異なる様々な関数系 $\{X_m\}$ が得られるが、数値解は $a_{m,i-1}$ にどのような値を用いても一致するので、最も簡単な次の多項式を展開関数に用いる。

$$U_m(\xi) = V_m(\xi) = (1 - \xi^2) \xi^{m-1} \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (13)$$

上式の関数は m が奇数のときに偶関数、 m が偶数のときに奇関数となる。

(3) 両端単純支持 : 両端での境界条件として次式を用いる。

$$v = 0, \quad \sigma_x = 0, \quad \tau_{xy} \neq 0 \quad (\text{at } \xi = \pm 1) \quad (14.a \sim c)$$

これを式(3)に課すと次式のように展開関数を選べよので、最も簡単な多項式として式(16)を用いる。

$$U_m = V'_m, \quad V_m = V''_m = 0, \quad V'_m \neq 0 \quad (\text{at } \xi = \pm 1) \quad (15)$$

$$V_m(\xi) = (1 - \xi^2) \{ (2m + 3) - (2m - 1)\xi^2 \} \xi^{m-1} \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (16)$$

また、任意形状の要素に対しては式(14.b)は一般的でないことと、より低次の多項式を用いた方が解の収束性がよいと考えられるので、式(14.b)の自然境界条件を無視した次の多項式についても検討する。

$$U_m(\xi) = V'_m(\xi), \quad V_m(\xi) = (1 - \xi^2) \xi^{m-1} \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (17)$$

(4) 一端固定・他端自由 : $\xi = -1$ で固定支持された場合には、境界条件は次のようになる。

$$u = v = 0 \quad (\text{at } \xi = -1), \quad \sigma_x = \tau_{xy} = 0 \quad (\text{at } \xi = 1) \quad (18.a, b)$$

自由端で u 、 v はともに非零であることを考慮すると、式(18.b)を満たす U_m 、 V_m を求めることができないので、式(18.a)のみを満足する多項式として次式を用いる。

$$U_m(\xi) = V_m(\xi) = (1 + \xi) \xi^{m-1} \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (19)$$

4. 数値計算例

(1) 正方形板 : 上縁に満載等分布荷重 p を受ける両端単純支持と両端固定支持の正方形板について計算する。図-2のように平板を5要素に分割し、対称変形を考慮して式(1)の U_m には逆対称モード、 V_m には対称モードのみを採用する。これら関数に、式(11)の三角関数と式(13)、(16)の多項式を用いた値を比較する。

計算では、図-2に示す上縁の10等分点(A~E)での変位と、上縁から $1/20$ 、 $5/20$ 、 $9/20$ 、 $13/20$ 、 $17/20$ での中心線上の応力を求める。計算値の精度を、平板の片側半分を 10×10 要素に分割した8節点セレンディビティ要素によるFEM解に対して調べると三角関数よりも多項式の方が精度がよく、誤差は約半分である。

(2) 三角形板 : 図-3に示す満載等分布荷重 p を受ける三角形片持板を等間隔に5分割し、さらに一番上の台形要素を2分割して計算する。式(19)を6項用いた結果をFEM解と比較すると、断面A-Aの変位は0.5%以下、 σ_x は3%以下であった。詳細なデータやその他の例については当日発表する。

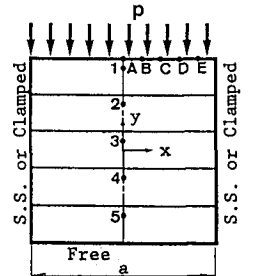


図-2 正方形板

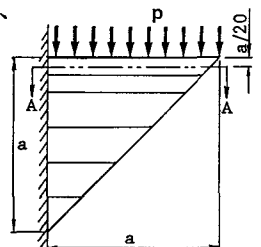


図-3 三角形板