

I-35 両縁に変位拘束を受ける帯板の面外曲げ

名古屋工業大学 学生員 三輪 昌弘
 名古屋工業大学 正員 長谷部宣男
 名古屋工業大学 正員 中村 卓次

〔まえがき〕 弾性板の幅が急変する箇所（幾何学的要因）や変位拘束端には応力集中が生じ、弾性的に応力は無限大となりクラック発生の危険性がある。変位拘束による解析の一例に、二次元弾性体の混合境界値問題として帯板を扱ったものには、文献〔1〕、〔2〕等があるが面外曲げの解析例は多くはない。本報告では文献〔2〕と同様に、変位拘束を受ける帯板についてクラック発生前と、その拘束端の一方からクラックが発生した場合を薄板の曲げ問題として解析を行う。解析には、物理領域を単位円内に写像する有理関数 $\omega(\zeta)$ と複素応力関数 $\phi(\zeta)$ 及び $\psi(\zeta)$ を用いる。

〔写像関数〕 帯板幅に対するクラック長 c/W の大小にかかわらず精度のよい写像を行うため図1に示す物理領域上の点に対応する単位円上の写像点を c/W が小さいときには図1.a、 c/W が大きいときには図1.bの2種類考え、それぞれ(1.a)式、(1.b)式を用いてよい結果を得ることができる。

$$\omega(\zeta) = K \int \frac{\zeta-1}{(\zeta^2+1)^{0.5}(\zeta-e^{-i\eta})(\zeta-e^{i\eta})} d\zeta \quad (1.a)$$

$$\omega(\zeta) = K \int \frac{\zeta-1}{(\zeta^2+1)(\zeta-e^{-i\eta})^{0.5}(\zeta-e^{i\eta})^{0.5}} d\zeta \quad (1.b)$$

パラメータ γ 及び η によって c/W を変化させることができ、同一の c/W に対して $\eta = \pi - \gamma$ なる関係がある。上の二式をそれぞれ展開し、(2)式のような有理型写像関数にかきかえて用いる。

$$\omega(\zeta) = \sum_{k=1}^n \frac{E_k}{\zeta_k - \zeta} + E_0 \quad ; \quad E_k, E_0, \zeta_k : \text{Complex Constants} \quad (2)$$

〔境界条件式とその解〕 境界条件式は、変位拘束部をM、外力境界をLとすると、

$$\begin{aligned} -\kappa\phi(\sigma) + \delta(\sigma)\phi(\sigma) + \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)}\overline{\phi'(\sigma)} + \overline{\psi(\sigma)} &= f(\sigma) \\ \kappa &= (3+\nu)/(1-\nu); \quad \delta(\sigma) = \begin{cases} \kappa+1 & \text{on } M \\ 0 & \text{on } L \end{cases}; \quad f(\sigma) = \begin{cases} \frac{\partial w}{\partial x} + i \frac{\partial w}{\partial y} & \text{on } M \\ \frac{1}{D(1-\nu)} \int [m(s) + i f p(s) ds] dz & \text{on } L \end{cases} \end{aligned} \quad (3)$$

ここに ν はポアソン比、 σ は境界上の点を表し、 w はたわみ、外力 $m(s)$ 、 $p(s)$ は単位長当りの曲げモーメント、置換せん断力である。(3)式を解くと(4)式、(5)式が得られる〔3〕。

$$\begin{aligned} \phi(\zeta) &= \frac{\chi(\zeta)}{\kappa} \sum_{k=1}^n \frac{\overline{A_k B_k}}{\chi(\zeta_k)(\zeta_k - \zeta)} + H(\zeta); \quad H(\zeta) = -\frac{M(\zeta)}{\kappa} + \frac{(\kappa+1)\chi(\zeta)}{2\pi i \kappa} \int_M \frac{M(\sigma)}{\chi(\sigma)(\sigma - \zeta)} d\sigma \\ \chi(\zeta) &= (\zeta - \alpha)^{1-\lambda} (\zeta - \beta)^\lambda; \quad \lambda = 0.5 - i \frac{(\ln \kappa)}{2\pi}; \quad M(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L+M} \frac{f(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma; \quad B_k = \frac{E_k}{\omega'(\zeta_k)}; \quad \zeta_k' = \frac{1}{\zeta_k} \end{aligned} \quad (4)$$

$$\psi(\zeta) = \kappa \overline{\phi(1/\zeta)} - \frac{\overline{\omega(1/\zeta)}}{\omega'(\zeta)} \phi'(\zeta) \quad (5)$$

帯板に偶力モーメント M_0 を載荷したとき $M(\zeta)$ は容易に求まるが、 $H(\zeta)$ に含まれる積分を求めるのは困難である。しかし応力等の計算には $H(\zeta)$ を求める必要はなく、その一次導関数 $H'(\zeta)$ が求まればよい。

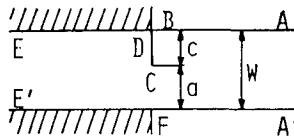


図1：物理領域
点Cはクラック先端を
斜線は剛体を表す

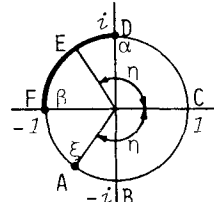


図1.a

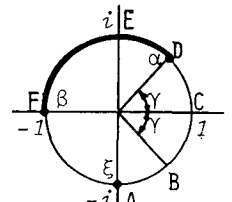


図1.b

$$H'(\zeta) = (-M_0/2\pi\kappa(1-\nu))(\xi-\alpha)^\lambda(\xi-\beta)^{1-\lambda}(\xi-\zeta)^{-1}(\zeta-\alpha)^{-\lambda}(\zeta-\beta)^{\lambda-1} \quad (6)$$

〔応力分布〕 応力分布の一例として、偶力モーメント M_0 を載荷したときの境界線の接線方向の曲げモーメント M_θ を図2に示す。上側の図がクラック発生前の応力分布で、変位拘束端に応力集中が生じクラック発生の危険性がある。下側はクラック発生後の M_θ の分布図で、クラック先端及び他方の変位拘束端に応力集中が見られる。

〔応力拡大係数〕 曲げ及びせん断モードの応力拡大係数 k_B 、 k_S を(7)式で無次元化した F_B 、 F_S を図3に示す[3]。

$$F_B + iF_S = (k_B + ik_S) \frac{3+\nu}{1+\nu} \frac{\sqrt{a}}{M_0} \quad (7)$$

本報告の場合(case 1)、半無限板と帯板との接合部から発生したクラック(case 2)[5]や、帯板に発生したクラック(case 3)[4]よりもポアソン比の影響を受けやすい。 F_B はクラック発生直後(c/W が比較的小)は、case 1>case 2>case 3 となり、クラックが進展するにしたがって大きさは逆転している。クラックが短いとき、応力集中部の影響によりcase 1が一番大きくなり、長くなると帯板の拘束条件がクラックの開きに対することへの影響が大きいためと思われる。なお、case 3は対称形であるから常に $k_S=0$ である。

〔あとがき〕 紙面の制約から応力分布図は M_θ のみを示したが、境界線の法線方向の曲げモーメント M_s について考察してみると、クラック発生前に変位拘束端で応力集中が生じている。この応力集中によって主に帯板と剛体との接合部からの剥離が発生することも考えられるが、剥離については今後の課題としたい。

〔参考文献〕

- [1] 長谷部, 三浦, 機械学会論文集第423号 (1981) 1129-1138
- [2] Hasebe, Miura, JSCE Structural Eng./Earthquake Eng. (Oct 1985) 99-106
- [3] Hasebe, Jor. Eng. Mech., ASCE, 110 (1984) 37-48
- [4] Hasebe, Matsuura, Kondo, Eng. Frac. Mech. 20 (1984) 447-462
- [5] 長谷部, 中村, 三輪, 第37回応用力学連合講演会 講演予講集 (1987) 89-90

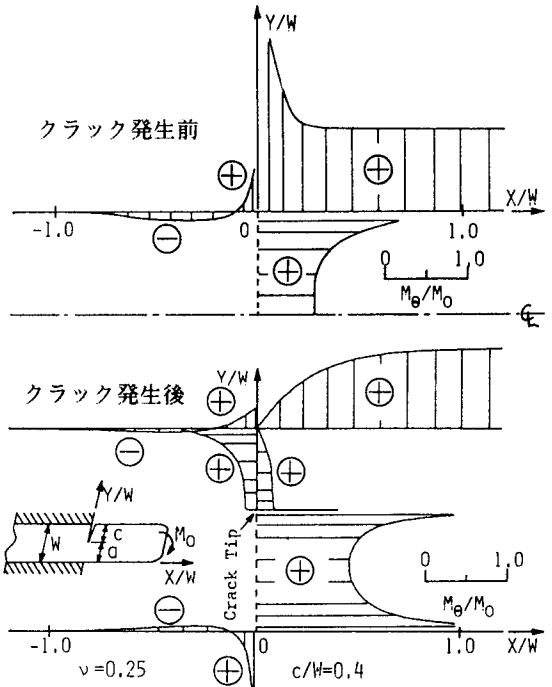


図2 曲げモーメント M_θ の分布

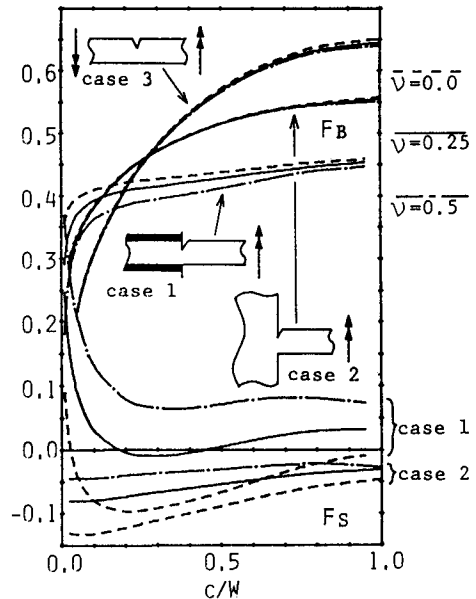


図3 応力拡大係数