

I-25

エネルギー法および変位法によるはり構造物の材料非線形解析法の比較

愛媛大学工学部 正会員 ○大久保 禎二
フジタ工業(株) 正会員 藤 脇 敏 夫
愛媛大学大学院 学生員 牧 野 耕 司

1. まえがき

本報告は、これまで著者らが行ってきたはり構造物の全コンプリメンタリーエネルギー最小化による材料非線形解析法^{1), 2)}、および、材料の非線形性を考慮したはり断面に作用する曲げモーメントと最外縁ひずみの関係曲線を導入し、この関係曲線より算定されるはり断面の仮想曲げ剛性を用いた変位法による計算を反復することにより解析する方法との比較検討を行ったものである。

2. エネルギー法による解析方法^{1), 2)}

最小コンプリメンタリーエネルギーの原理によれば、材料の非線形性を考慮したはり構造物の解析は、各支点に作用する不静定曲げモーメント M_i を未知変数とし、各支点における曲げモーメントの釣合条件のもとで、はり構造物の全コンプリメンタリーエネルギー Πc を最小化することにより行うことができる。

文献1)および2)では、この原理に基づき、連続ばりを各支点ごとに切断し、静定基本系として単純ばりを仮定し、はりの各支点に作用する不静定曲げモーメント M_i を未知変数として、はりの全コンプリメンタリーエネルギー Πc を M_i の関数として表現することにより、次のような無制約最小化問題を導入する。

$$\text{find } M_i, \quad \text{such that, minimize } \Pi c(M_i) = \sum_{i=1}^m \Pi c_i(M_{i-1}, M_{i+1}) \quad \dots (1)$$

ここに、 m : 静定基本ばりの数、 $\Pi c_i(M_{i-1}, M_{i+1}) = \int_{x_i} \pi c(M_{i-1}, M_{i+1}) dx_i$: i 番目の静定基本ばりの全コンプリメンタリーエネルギー、 $\pi c(M_{i-1}, M_{i+1})$: i 番目の静定基本ばりの任意点のはり断面のコンプリメンタリーエネルギー、 $M_i = [M_{i1}, \dots, M_{in}]^T$

式(1)の無制約なエネルギー最小化問題を逐次、二次形式に近似し、はりの全コンプリメンタリーエネルギーを最小化することにより、真の不静定曲げモーメントを決定することができる。この方法では式(1)より決定すべき未知変数は支点上に作用する不静定曲げモーメントのみとなる。なお、解析にあたっては、はり断面の曲げモーメント M とコンプリメンタリーエネルギー πc の関係を導入し、はり構造物の全コンプリメンタリーエネルギーおよびその不静定曲げモーメントに対する偏微係数の計算を能率的に行っている。

3. 仮想曲げ剛性を用いた変位法による解析方法

非線形の応力度-ひずみ関係を有する材料からなるはり断面においては、断面の仮想曲げ剛性 $\overline{EI}$ は断面に作用する曲げモーメント M の大きさによって変化し一定とはならない。そこで、この方法では、あらかじめ M と最外縁ひずみ ϵ_e との関係曲線を作成し、この関係を用いて次式により各断面に作用する M に対応する仮想曲げ剛性 $\overline{EI}$ を仮定する。

$$\overline{EI} = \frac{M Y_e}{\epsilon_e} \quad \dots (2) \quad \text{ここに、} Y_e : \text{中立軸より最外縁までの距離}$$

この $\overline{EI}$ を用いて、従来の変位法の計算手法により各要素端に作用する M を算定し、この各要素に作用する平均曲げモーメントを用いて $M - \epsilon_e$ 関係曲線より ϵ_e を求め、式(2)により $\overline{EI}$ を修正し、再び変位法により M を求める。このような変位法による解析および仮想曲げ剛性 $\overline{EI}$ の修正を、 $\overline{EI}$ および M が一定値に収束するまで繰り返すことにより、はり構造物の真の曲げモーメント分布を決定するものである。この方法では、変位法により解くべき未知変数は各微小はり要素の両端の鉛直および回転変位となる。

4. 数値解析例および考察

上記のエネルギー法および変位法により、図-1に示す3種類の非線形材料A, B, Cよりなる数種の連続ばりを、大小2種類の荷重状態(I, II)について解析を行い、その結果を比較することにより、材料特性及び荷重の大きさが両解法の解の精度や計算効率に及ぼす影響について検討した。例として、図-2に示す三径間連続ばりおよび図-3に示す四径間連続両端固定ばりの計算結果をそれぞれ表-1および表-2に示す。な

お、本研究では両解析法において十分な精度の解を得るため、計算時間を考慮して、はり構造物の分割幅を2.0cmとして解析を行っている。

これらの計算結果を比較すると、両解析法による解の相対誤差はほとんど0.05%以下である。その他の計算例においてもまれに0.20%程度の相違がみられるにとどまり、両解析法によりほぼ完全に一致した解が得られることが明らかとなった。つぎに計算効率についてみると、作用荷重が小さく材料Aの初期弾性状態の範囲に応力状態がある場合には、変位法では1回の計算で解が得られる。しかし、作用荷重が大きくなり応力状態が非線形の状態では、変位法による反復計算回数は急速に増加し、7～13回で解が得られることとなる。それに対して、エネルギー法では特に荷重の大きさには関係なく、むしろ未知数である不静定曲げモーメントの数により多少反復回数が増加する傾向にあり、未知数が2個（三径間連続ばり）の場合4～6回、未知数が4個（四径間連続両端固定ばり）の場合11～13回で解を得ている。ただし、各計算モデルにおける両解析法の計算時間(CPU.)の比は四径間連続両端固定ばりの材料特性Cの場合を除いて2/5～4/5となっており、エネルギー法がより短時間で解を得ている。

以上の検討結果より、本研究で述べた変位法も極めて有効な解法であるが、エネルギー法に基づく解析法により、精度の高い解がより効率的に求められることが明らかとなった。

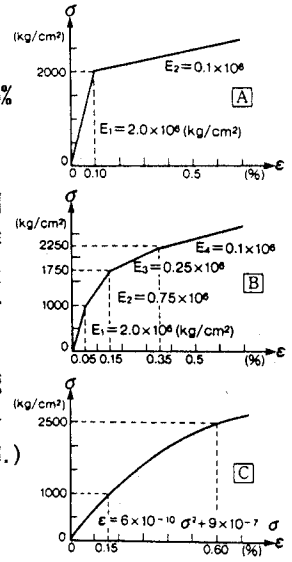
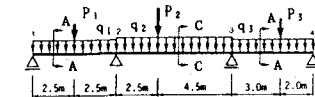


図-1 3種類の非線形応力度-ひずみ関係

表-1 エネルギー法と変位法の解析結果の比較（三径間連続ばり）

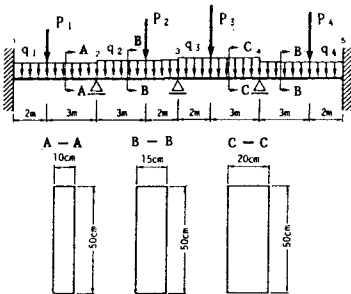
材 種		材 料 A			材 料 B			材 料 C		
解析方法		ENERGY法	変位法	誤差 ¹⁾	ENERGY法	変位法	誤差 ¹⁾	ENERGY法	変位法	誤差 ¹⁾
載荷状態	M ₁₂ ²⁾	-79.235	-79.238	0.004%	-76.930	-76.933	0.004%	-76.485	-76.486	0.001%
	M ₁₃	-74.238	-74.238	0.000%	-72.865	-72.863	0.003%	-72.772	-72.773	0.001%
	E _{max} ³⁾	0.094%			0.126%			0.307%		
I	CPU ⁴⁾	1.63(5)	1.96(1)	0.832	1.88(6)	4.82(7)	0.390	1.82(5)	5.14(7)	0.354
載荷状態	M ₁₂ ²⁾	-142.693	-142.690	0.002%	-142.023	-142.016	0.005%	-150.715	-150.719	0.003%
	M ₁₃	-138.594	-138.602	0.006%	-138.143	-138.143	0.000%	-144.264	-144.269	0.003%
	E _{max} ³⁾	0.580%			0.638%			0.872%		
II	CPU ⁴⁾	2.40(6)	7.54(12)	0.318	2.64(6)	6.71(10)	0.393	2.21(4)	5.67(8)	0.390



載荷状態 I $P_1=40\text{ton}, P_2=70\text{ton}, P_3=50\text{ton}$
 $q_1=5\text{ton/m}, q_2=10\text{ton/m}, q_3=5\text{ton/m}$

載荷状態 II $P_1=80\text{ton}, P_2=140\text{ton}, P_3=100\text{ton}$
 $q_1=10\text{ton/m}, q_2=20\text{ton/m}, q_3=10\text{ton/m}$

図-2 三径間連続ばり



載荷状態 I $P_1=80\text{ton}, P_2=100\text{ton}, P_3=125\text{ton}$
 $P_4=120\text{ton}, q_1=10\text{ton/m}, q_2=15\text{ton/m}$
 $q_3=20\text{ton/m}, q_4=10\text{ton/m}$

載荷状態 II $P_1=160\text{ton}, P_2=200\text{ton}, P_3=250\text{ton}$
 $P_4=240\text{ton}, q_1=20\text{ton/m}, q_2=30\text{ton/m}$
 $q_3=40\text{ton/m}, q_4=20\text{ton/m}$

図-3 四径間連続両端固定ばり

表-2 エネルギー法と変位法の解析結果の比較（四径間連続両端固定ばり）

材 種		材 料 A			材 料 B			材 料 C		
解析方法		ENERGY法	変位法	誤差(%)	ENERGY法	変位法	誤差(%)	ENERGY法	変位法	誤差(%)
載 荷 状 態	M ₁₂ ⁽¹⁾	-75.893	-75.888	0.007%	-73.743	-73.744	0.001%	-73.955	-73.958	0.004%
	M ₁₃ ⁽¹⁾	-64.320	-64.325	0.008%	-65.066	-65.071	0.008%	-64.935	-64.935	0.000%
	M ₁₄ ⁽¹⁾	-121.682	-121.645	0.030%	-118.154	-118.142	0.010%	-117.919	-117.920	0.001%
	M ₁₅ ⁽¹⁾	-92.509	-92.555	0.050%	-93.154	-93.185	0.033%	-93.162	-93.178	0.017%
	E _{max} ⁽¹⁾	-100.231	-100.172	0.059%	-98.515	-98.473	0.043%	-98.201	-98.177	0.024%
I		0.096%			0.131%			0.318%		
CPU ⁽¹⁾		3.54(9)	2.32(1)	1.526	4.56(12)	5.81(7)	0.785	4.51(10)	5.95(7)	0.758
載 荷 状 態	M ₁₂ ⁽²⁾	-138.776	-138.775	0.001%	-140.356	-140.351	0.004%	-146.511	-146.517	0.004%
	M ₁₃ ⁽²⁾	-132.064	-132.064	0.000%	-131.362	-131.352	0.008%	-130.215	-130.218	0.002%
	M ₁₄ ⁽²⁾	-219.510	-219.517	0.003%	-220.689	-220.703	0.006%	-232.961	-232.971	0.004%
	M ₁₅ ⁽²⁾	-188.467	-188.428	0.021%	-187.787	-187.748	0.021%	-186.753	-186.737	0.009%
	E _{max} ⁽²⁾	-190.932	-191.001	0.036%	-189.301	-189.365	0.034%	-194.781	-194.811	0.015%
II		0.625%			0.726%			0.911%		
CPU ⁽²⁾		6.09(11)	9.75(13)	0.625	6.58(10)	8.83(11)	0.745	7.13(11)	7.06(8)	1.010

1): 変位法による解との相対誤差、ただし計算時間は変位法との比 2): 不静定曲げモーメント (ton-m)
 3): 最大ひずみ 4): FACOM M-360AP による計算時間(sec) (ただし、() の数値は反復計算回数を表す)

参考文献: 1) 大久保禎二, 藤脇敏夫: "エネルギー原理によるはり構造物の材料非線形解析法に関する考察" 土木学会第42回年次学術講演会概要集, pp. 88-89, 1987.9. 2) 大久保禎二, 藤脇敏夫: "コンプレメンタリーエネルギー最小化によるはり構造物の材料非線形解析法", 土木学会論文集 (投稿中)