

I-23

非定常流れ有限要素方程式非線形項の逐次解法のアプローチ

東京工業大学	正会員	吉 田 裕
東京工業大学	正会員	依知川 哲治
横河橋梁製作所		津 田 敏
東京工業大学		佐々木 隆

1. まえがき

これまでに筆者らはNavier-Stokes方程式と非圧縮の連続条件式を基礎とした有限要素法による非圧縮非定常粘性流れの解析アルゴリズムを構成している¹⁾。これは独自の高精度な直接時間積分公式²⁾を適用して漸化式を得たものである。この場合には非線形項(対流項)の評価の際に第一近似値として前段階に計算された流速を用いて収束計算を行う解法としていたが、高レイノルズ数の流れを対象とする場合には要素分割とともに積分時間間隔も相当に細かくとる必要があり計算時間に関しても制約が大きかった。

本文は、新たに展開した非線形項の逐次解法のアプローチについて報告するものである。なお、このアルゴリズムは非線形有限要素方程式の解法として汎用的に適用し得るものである。

2. 積分漸化式

対象とする有限要素方程式はNavier-Stokes方程式と連続条件式に対し流速と圧力を基本変数として空間の離散化を行い、前述の時間積分公式を適用して得られた次のような方程式系である。

$$[A] \begin{Bmatrix} \varphi_i \\ P_{i+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_\varphi^L \\ R_P^L \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -\frac{\Delta t}{6} \left\{ \begin{matrix} \tilde{K}_{i+1}^\alpha u_{i+1} \\ 0^\beta \end{matrix} \right\} \\ -\frac{\Delta t}{3} (K_P^\alpha)^T (M_L^\alpha)^{-1} (\tilde{K}_{i+1}^\alpha u_{i+1}) \end{Bmatrix} \quad (1)$$

$$u_{i+1}^\alpha = (M_L^\alpha)^{-1} \left\{ \frac{\Delta t}{3} \tilde{f}_{i+1}^\alpha + \frac{\Delta t}{6} r_i^\alpha - \frac{\Delta t}{3} (K_P^\alpha P_{i+1} + \tilde{K}_{i+1}^\alpha u_{i+1}) - \Lambda_{21}^\alpha \varphi_i \right\} \quad (2)$$

$$f_{i+1}^\beta = \frac{3}{\Delta t} (M_L^\beta \tilde{u}_{i+1}^\beta + \Lambda_{21}^\beta \varphi_i) - \frac{1}{2} r_i^\beta + K_P^\beta P_{i+1} + \tilde{K}_{i+1}^\beta u_{i+1} \quad (3)$$

添え字*i*及び*i+1*は時刻*t_i*及び*t_{i+1}*(=*t*+Δ*t*)における変数であることを示す。式(1)の作用素[A]は積分時間間隔が一定である場合には解析過程で一定である。Pは圧力、uは流速、fは節点力、φは時間積分公式の媒介変数である。右辺のベクトルの中で{R}は1ステップ前の変数及び境界条件から直接求められる項であり、 $\tilde{K}_{i+1}^\alpha u_{i+1}$ の $\tilde{K}_{i+1}^\alpha$ が流速*u_{i+1}*の関数となっている。

3. 提案する非線形項の逐次解法のアプローチ

求める解は式(1)の右辺第一項の定数及び*u_i*の関数として決まる成分と、第二項の非線形項すなわち*u_{i+1}*の関数によって決まる成分の和で表わされる。それぞれに対する流速成分を*u^L*、*u^N*と表わすものとして、まず*u^L*を求める。*u_{i+1}*=*u^L*+*u^N*として式(1)の右辺の非線形項を評価すると、*u^L*によって決まる成分と*u^N*に関係する成分とに分離することができ、*u^L*によって決まる流速の非線形成分*u^{N(1)}*を求めることができる。

$$u^N = u^{N(1)} + \sum_{j=2}^{\infty} u^{N(j)} \quad (4)$$

として、上記の*u^N*に関係する成分のうち*u^{N(1)}*によって決まる成分によって得られる流速の非線形成分*u^{N(2)}*を求めることができる。同様に式(1)の右辺のうち*u^{N(2)}*によって決まる成分によって得られる流速の非線形

成分を $u^{N(j)}$ とすれば、つぎつぎと $u^{N(j)}$ を求めていくことができる。

この求解過程を式で表わすと次のように示すことができる。

$$[A] \begin{Bmatrix} \varphi^{N(j+1)} \\ P^{N(j+1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\Delta t}{6} \left\{ \bar{R}^{\alpha N(j-1)} u^{N(j)} + \bar{R}^{\alpha N(j)} u_{i+1}^{(j-1)} + \bar{R}^{\alpha N(j)} u^{N(j)} \right\} \\ -\frac{\Delta t}{3} (Kp^{\alpha})^T (M_L^{\alpha})^{-1} (\bar{R}^{\alpha N(j-1)} u^{N(j)} + \bar{R}^{\alpha N(j)} u_{i+1}^{(j-1)} + \bar{R}^{\alpha N(j)} u^{N(j)}) \end{Bmatrix} \quad (5)$$

$$u^{\alpha N(j+1)} = (M_L^{\alpha})^{-1} \left\{ -\frac{\Delta t}{3} (Kp^{\alpha})^T P^{N(j+1)} + \bar{R}^{\alpha N(j-1)} u^{N(j)} + \bar{R}^{\alpha N(j)} u_{i+1}^{(j-1)} + \bar{R}^{\alpha N(j)} u^{N(j)} - \Lambda_{21}^{\alpha} \varphi^{N(j+1)} \right\} \quad (6)$$

$$f^{\beta N(j+1)} = Kp^{\beta} P^{N(j+1)} + \bar{R}^{\beta N(j-1)} u^{N(j)} + \bar{R}^{\beta N(j)} u_{i+1}^{(j-1)} + \bar{R}^{\beta N(j)} u^{N(j)} + \frac{3}{\Delta t} \Lambda_{21}^{\beta} \varphi^{N(j+1)} \quad (7)$$

実際の解析においては、このようにして求められる $u^{N(j)}$ が非常に小さい値をとり判定規準を満たしたとき、1つの時間増分の計算を打ち切り、この時点で得られた流速を時刻 t_{i+1} における解とする方法が提案するアルゴリズムである。

4. 解析例

数多くの具体的な解析に基づいて検討を行った結果、積分時間間隔のとり方等に関して相当な効率化が見られ、一般的非線形有限要素方程式の解法としても有効なものであることがわかった。

ここでは解析例としてこのアルゴリズムによって得られた結果を示す。図1に示すような要素分割により $Re=1200$ の場合の角柱周りの流れを解析した。図2(b)に流速ベクトル図を示す。計算結果の妥当性を検証するために岡島・杉谷によって与えられた可視化実験の結果³⁾を比較して図2(a)に示した。

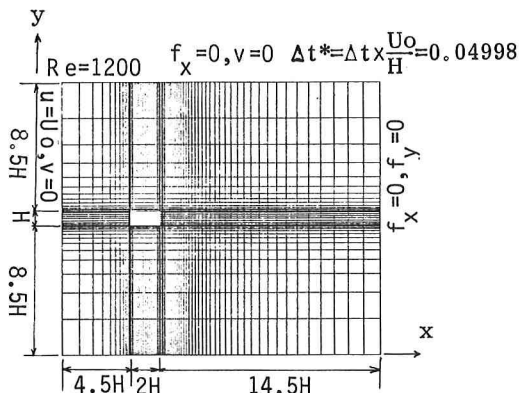


図1 要素分割図

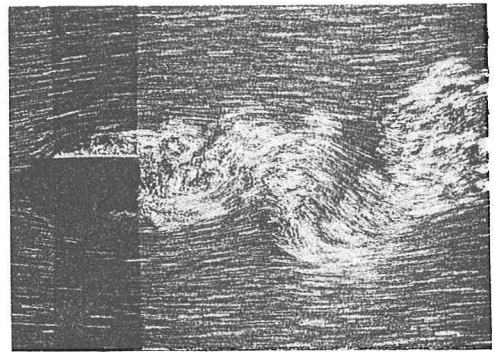
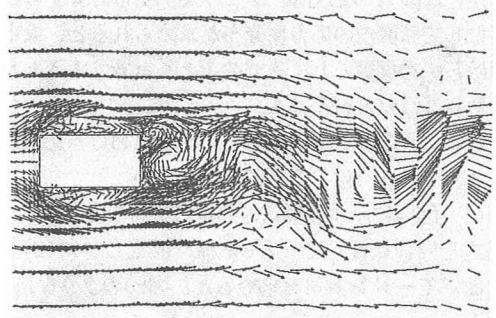


図2 (a) 岡島・杉谷による可視化実験結果³⁾



(b) 流速ベクトル図

参考文献 1) 吉田・野村・菅野: 非定常非圧縮粘性流れの有限要素方程式の解法, 土木学会論文報告集, 第351号, 1984 2) 吉田・藤原・野村: 熱伝導型方程式の直接時間積分法と高精度化のアルゴリズム 3) 岡島・杉谷: 矩形柱周りの流れ—数値計算と可視化実験, その2, 九大応力研所報, 第50号, 昭和54年