I-21 有限要素法の精度チェツクの一方法

飛島建設 正 員 中島 兼
熊本大学 正 員 平井一男
八代高専 内山義博

1。まえがき

二次元平面応力問題においては、二方向の力の釣合並びに適合条件の三条件式を満足することが必要である。一方、有限要素法は近似解法であるから、前記条件を満足する為には無限に要素分割を行う必要がある。しかし、計算機容量、時間の関係から無限に分割することは不可能である。本報告では、有限要素の各応力の座標による微分値を求め、これに前記三条件式を適用することにより、要素分割の適否の検討、計算精度のチェツクを行う。

2。理論

2.1 二次元平面応力問題の三条件式

物体力が無いとすると、釣合方程式は

$$\sigma_x{,x} + \tau_{xy}{,y} = 0 \qquad (1) \qquad\qquad \tau_{xy}{,x} + \sigma_y{,y} = 0 \qquad (2)$$

であり、また応力に関する適合条件式は下記のごとく表せる。

$$\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = 0 \qquad (3)$$

但し $\nabla^2 = \_{,xx} + \_{,yy}$ である。

従って、応力に関しての2階微分までが必要となる。

ここで、$\_{,x}$、$\_{,xx}$ はそれぞれxでの偏微分 $\partial \_/\partial x$、$\partial^2 \_/\partial x^2$ を表すものとする。

2.2 座標による応力の微分値

三角形歪一定要素での応力ベクトルと変位ベクトルの関係は次式で表せる。

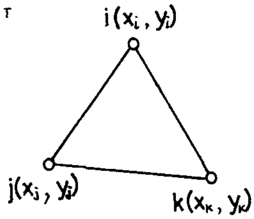
$$\sigma = DBu \qquad (4)$$

$$D = \frac{1}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \qquad B = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} y_{jk} & 0 & y_{ki} & 0 & y_{ij} & 0 \\ 0 & x_{kj} & 0 & x_{ik} & 0 & x_{ji} \\ x_{kj} & y_{jk} & x_{ik} & y_{ki} & x_{ji} & y_{ij} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta}\bar{B}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix} = x_j y_k + x_k y_i + x_i y_j - x_j y_i - x_i y_k - x_k y_j$$

但し、$\sigma = [\sigma_x \ \sigma_y \ \tau_{xy}]^T$ $U = [u_i \ v_i \ u_j \ v_j \ u_k \ v_k]^T$

E：ヤング率 ν：ポアソン比である。



図－1 三角形要素

さて、式(4)をxで微分すると

$$\sigma{,x} = DB{,x}U + DBU{,x} \qquad (5)$$

であり、更に微分すると次式となる。

$$\sigma{,xx} = DB{,xx}U + 2DB{,x}U{,x} + DBU{,xx} \qquad (6)$$

以下に式(5),(6)に必要な微分値を求める式の誘導を行う。

まず歪マトリックスBについて、x座標での微分は

$$B{,x} = -\Delta{,x}\bar{B}/\Delta^2 + \bar{B}{,x}/\Delta = (\bar{B}{,x} - \Delta{,x}B)/\Delta \qquad (7)$$

である。ここでB、△のｉ，ｊ，ｋ節点x座標での微分は次の様に表せる。

$$\bar{B}{,x_i} = \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&-1 \\ 0&0&1&0&-1&0 \end{bmatrix} \quad \bar{B}{,x_j} = \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0 \\ 0&-1&0&0&0&1 \\ -1&0&0&0&1&0 \end{bmatrix} \quad \bar{B}{,x_k} = \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&-1&0&0 \\ 1&0&-1&0&0&0 \end{bmatrix} \qquad (8)$$

$$\Delta ,x_i = y_{jk} = y_j - y_k、\ \Delta ,x_j = y_{ki} = y_k - y_i、\ \Delta ,x_k = y_{ij} = y_i - y_j \quad (9)$$

これにより節点のｘ座標によるＢマトリックスの微分値Ｂ,xは求められる。

さらに、２階微分は $\overline{B}$,xx＝Δ,xx＝０、式(7)を考慮すると次のごとく簡単になる。

$$\begin{aligned} B,xx &= -\Delta ,x\overline{B},x/\Delta^2 + \overline{B},xx/\Delta - \overline{B},x\Delta ,x/\Delta - B\{(-\Delta ,x)^2/\Delta^2 + \Delta ,xx/\Delta\} \\ &= -\overline{B},x\Delta ,x/\Delta^2 - B,x\Delta ,x/\Delta + B(\Delta ,x)^2/\Delta^2 \\ &= -2\Delta ,xB,x/\Delta \end{aligned} \quad (10)$$

次に変位の微分について求める。外力ベクトルＦと変位ベクトルＵの関係は剛性マトリックスＫを用いて表すと　$F = KU$　(11)　である。

式(11)をｘで微分すると次式となる。

$$F,x = K,xU + KU,x \quad (12)$$

$$F,xx = K,xxU + 2K,xU,x + KU,xx \quad (13)$$

外力は座標に無関係であるからＦ,x＝Ｆ,xx＝０より次式が導かれる。

$$U,x = -K^{-1}K,xU = -K^{-1}U^{*} \quad (U^{*} = K,xU) \quad (14)$$

$$U,xx = -K^{-1}(2K,xU,x + K,xxU) \quad (15)$$

剛性マトリックスは $K = \Sigma\Delta/2\times B^TDB$ よりｎ番目の三角形要素に対するものを $K_n = \Delta_n/2B_n^TDB_n$ で表すとその各微分は次式となる。

$$K_n,x = 1/2\Delta_n,xB_n^TDB_n + \Delta_n/2B_n^T,xDB_n + \Delta_n/2B_n^TDB_n,x \quad (16)$$

$$\begin{aligned} K_n,xx &= \Delta_n,xB_n^T,xDB_n + \Delta_n,xB_n^TDB_n,x + \Delta_nB_n^T,xDB_n,x + \Delta_n/2B_n^T,xxDB_n \\ &\quad + \Delta_n/2B_n^TDB_n,xx = \Delta_n,xB_n^T,xDB_n + \Delta_n,xB_n^TDB_n,x + \Delta_nB_n^T,xDB_n,x \\ &\quad - \Delta_n,xB_n^T,xDB_n - \Delta_n,xB_n^TDB_n,x \\ &= \Delta_nB_n^T,xDB_n,x \end{aligned} \quad (17)$$

以上で式(5)、(6)の算定に必要な全ての項が求まった。従って、応力の各節点に於けるｘ座標による微分値σ,x、σ,xxは求められる。また、ｙ座標による応力の微分値σ,y、σ,yyについてもまったく同様にして求められる。

2.3 三角形要素応力の微分値

上記より一要素のｉ節点に於けるｘ、ｙ座標での応力の微分値は

$$\sigma ,x_i = [\sigma_x,x_i \ \ \sigma_y,x_i \ \ \tau_{xy},x_i]^T \qquad \sigma ,y_i = [\sigma_x,y_i \ \ \sigma_y,y_i \ \ \tau_{xy},y_i]^T \quad (18)$$

$$\sigma ,x_ix_i = [\sigma_x,x_ix_i \ \ \sigma_y,x_ix_i \ \ \tau_{xy},x_ix_i]^T \qquad \sigma ,y_iy_i = [\sigma_x,y_iy_i \ \ \sigma_y,y_iy_i \ \ \tau_{xy},y_iy_i]^T \quad (19)$$

であり、ｊ，ｋ節点についても同様である。このように任意要素について３個の微分値が求まる。一方応力値はその要素に関する三つの節点変位で求まり、要素内一定であるが、一般にはこれはその三角形の重心点での応力値を与えると考えることができる。また、微分であるからもともと微小三角形を考えている。この意味で、微分値としてもその要素の重心点座標での微分が考えられる。

ところで、三角形の重心座標は

$$x_G = (x_i + x_j + x_k)/3、\ y_G = (y_i + y_j + y_k)/3 \quad (20)$$

であり、これによる微分は要素３節点での微分値の合計でよい。すなわち

$$\sigma_x,x_G = \sigma_x,x_i + \sigma_x,x_j + \sigma_x,x_k、\ \sigma_x,y_G = \sigma_x,y_i + \sigma_x,y_j + \sigma_x,y_k \quad (21)$$

で与えられる。

３。数値計算

上記で求められる各微分値を 2.1 の三条件式(1)～(3)に代入してその誤差を調べることにより要素分割の適否、さらには計算精度のチェツクが行えよう。なお、数値計算結果については当日発表する予定である。

(参考文献) 中島　他：座標の微分によるＦＥＭの精度の一検討法，62年度土木学会西部支部発表会