

I-20

境界要素法の自動要素分割と誤差予測に関する一考察

新潟大学工学部 正員 阿部 和久

新潟大学大学院 中川 渉

1. はじめに 近似解の精度の評価や自動要素分割の問題は、有限要素法において多くの研究が行われており、近年では境界要素法に対する応用もさかに行われるようになって来た¹⁾。従来、境界要素法の精度への各要素からの影響度を示すerror indicator には、各要素上に分布する「近似解の残差」のノルムが主に用いられており、ノルムの定義や具体的なノルムの計算方法に対して様々な提案がなされて来たようである。しかし、選点法を用いた場合、残差は各選点においてゼロとなるので、その分布を求めるためには選点以外の適当な点で残差を求める必要がある。又、従来の手法では各節点において近似解が具体的にどの程度の誤差を有するのかを知ることは難しい。そこで、本研究では「方程式の離散化による残差」に関する量をerror indicator に用い、以上の点の改善を試みた。

2. Error indicator と Error estimator ここでは、次の二次元ポテンシャル問題について考える。

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 & \text{in } \Omega \in \mathbb{R}^2 \\ u &= \bar{u} & \text{on } \Gamma_1, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = \bar{q} & \text{on } \Gamma_2 \quad (\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(1)$$

ここで、 Δ はラプラシアン、 n は外向き法線ベクトルである。

式(1)の境界値問題を直接法に基づく境界積分方程式に変換すると次式を得る。

$$c(x)u(x) + \int_{\Gamma} q^*(x,y)u(y) d\Gamma_y - \int_{\Gamma} u^*(x,y)q(y) d\Gamma_y = 0 \quad (x \in \Gamma) \quad \dots\dots\dots(2)$$

ただし、 $u = \bar{u}$ on Γ_1 、 $q = \bar{q}$ on Γ_2 であり、 q^*, u^* はラプラスの方程式に対する基本解とする。

式(2)の境界値関数 u, q に対する近似解 $\tilde{u}, \tilde{q}$ を次式のように定義する。

$$\tilde{u}(x) = \sum \phi_i(x) \tilde{u}_i, \quad \tilde{q}(x) = \sum \phi_i(x) \tilde{q}_i \quad \dots\dots\dots(3)$$

ここで、 ϕ_i は補間関数であり、 N は総節点数、又、 $\tilde{u}_i = \tilde{u}(x_i), \tilde{q}_i = \tilde{q}(x_i)$ である。特に節点 $x_i \in \Gamma_1$ においては $\tilde{u}_i = \bar{u}(x_i), x_i \in \Gamma_2$ においては $\tilde{q}_i = \bar{q}(x_i)$ と定めるものとする。以上の定義の下、式(3)を式(2)へ代入すると次式を得る。

$$c(x)\tilde{u}(x) + \int_{\Gamma} q^*(x,y)\tilde{u}(y) d\Gamma_y - \int_{\Gamma} u^*(x,y)\tilde{q}(y) d\Gamma_y = r(x) \quad \dots\dots\dots(4)$$

ここで、 $r(x)$ は近似解 $\tilde{u}, \tilde{q}$ により与えられる残差である。更に、式(3)の未知パラメーターを決定するため、次の選点法を用いるものとする。

$$r(x_i) = 0 \quad (i=1, 2, \dots, N) \quad \dots\dots\dots(5)$$

各要素の精度への影響度を評価するerror indicator として、従来は式(4)で与えられる残差 $r(x)$ に基づいたものが主に用いられて来た。ここでは式(5)より、新たなerror indicator を定義する。

まず、式(2)、(4)、(5)から次式を得る。

$$c_i(u_i - \tilde{u}_i) + \int_{\Gamma} q^*(x_i, y)(u - \tilde{u}) d\Gamma_y - \int_{\Gamma} u^*(x_i, y)(q - \tilde{q}) d\Gamma_y = 0 \quad \dots\dots\dots(6)$$

真の解 u, q を式(3)と同一の方法で補間した関数 $\hat{u}, \hat{q}$ を用いて式(6)を次のように書き直す²⁾。

$$\begin{aligned} c_i E_{u_i} + \int_{\Gamma_2} q^*(x_i, y) \hat{E}_u d\Gamma_y - \int_{\Gamma_1} u^*(x_i, y) \hat{E}_q d\Gamma_y &= R(x_i) \\ R(x_i) &:= - \int_{\Gamma} q^*(x_i, y)(u - \hat{u}) d\Gamma_y + \int_{\Gamma} u^*(x_i, y)(q - \hat{q}) d\Gamma_y \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(7)$$

ここで、 $\hat{E}_u = \hat{u} - \hat{u}_i, \hat{E}_q = \hat{q} - \hat{q}_i$ であり、それぞれ誤差 $u - \hat{u}, q - \hat{q}$ を補間して得られるものである。又、 $R(x)$ は積分方程式(2)の離散化による残差である。式(7)を、式(5)より与えられる連立方程式と同一の係数行列 $[K]$ を用いて表現すれば次のようになる。

$$[K] \{E\} = \{R\} \quad \{E\} = [E_q, E_u]^T, \quad \{R\} = [R_1, R_2, \dots, R_N]^T \quad \dots\dots\dots(8)$$

式(7)の $R(x_i)$ を N_e 個の各要素 Γ_j ごとの積分に分けて表現すれば次式となる。

$$R(x_i) = - \sum_j \int_{\Gamma_j} q^*(x_i, y)(u - \hat{u}) d\Gamma_y + \sum_j \int_{\Gamma_j} u^*(x_i, y)(q - \hat{q}) d\Gamma_y \quad \dots\dots\dots(9)$$

本研究ではerror indicator として、式(9)に関連した次の値 λ_{ij} を用いた。

$$\lambda_{ij} := \text{Max} \left\{ \left| \int_{\Gamma_j} q^*(x_i, y)(u-\hat{u}) d\Gamma_y \right|, \left| \int_{\Gamma_j} u^*(x_i, y)(q-\hat{q}) d\Gamma_y \right| \right\} \quad (i=1, \dots, N, j=1, \dots, N_e) \quad \dots(10)$$

又、全体の精度を評価するためのerror estimator : η には次のいずれかを用いる。

$$\eta_1 := \text{Max} |R_i| \quad (i=1, \dots, N) \quad \dots\dots\dots(11.a)$$

$$\eta_2 := \left[\sum_{i=1}^{N_e} |R_i|^2 \cdot \ell_i \right]^{1/2} \quad (\text{一定要素を用いた場合。}\ell_i: \text{要素長}) \quad \dots\dots\dots(11.b)$$

3. 残差 R_i の評価および自動分割 本研究では、要素次数は一定のまま局所的に要素分割を行う、いわゆるh法を用い、特に一定要素による近似を考察の対象とした。式(9),(10)の値を計算するには $u-\hat{u}, q-\hat{q}$ を求める必要がある。しかし、これらは真の解 u, q が与えられなければ求まらない。そこで、次に示す近似により $u-\hat{u}, q-\hat{q}$ の評価を行った。

u, q は各要素上で定義された局所座標 s により次のように展開できるものとする。

$$u(s) = u_i + \frac{du}{ds} \Big|_i s + \frac{1}{2} \cdot \frac{d^2 u}{ds^2} \Big|_i s^2 + \dots, \quad q(s) = q_i + \frac{dq}{ds} \Big|_i s + \frac{1}{2} \cdot \frac{d^2 q}{ds^2} \Big|_i s^2 + \dots \quad \dots\dots\dots(12)$$

要素 Γ_i 上で $\hat{u}=u_i, \hat{q}=q_i$ (const)であるから、 $\frac{du}{ds} \Big|_i, \frac{dq}{ds} \Big|_i$ の代わりに近似解 $\hat{u}, \hat{q}$ の隣接要素同志の差分を用いれば、 $u-\hat{u} \sim \frac{\Delta u}{\Delta s} \Big|_i \cdot s, q-\hat{q} \sim \frac{\Delta q}{\Delta s} \Big|_i \cdot s \dots\dots(13)$ となる。式(13)を用いて式(9),(10)の R_i, λ_{ij} を求める。

又、各節点における誤差は式(8)を解いて求めることができる。以上に述べた手法による自動要素分割を行なうための手順を図-1に示す。

4. 解析例 ここでは図-2に示した問題に対し、本手法を適用した結果について述べる。初期分割は各辺共1要素分割とし、estimator には式(11.a)を用いた。図-3,4に節点数 N と各 η との関係を、一様分割の場合と合わせて示す。又、 η に対して、式(13)より近似して求めた値と、厳密な値とを示した。この問題に対しては η が精度良く評価されており、 λ_{ij} が有効に働いていることがわかる。

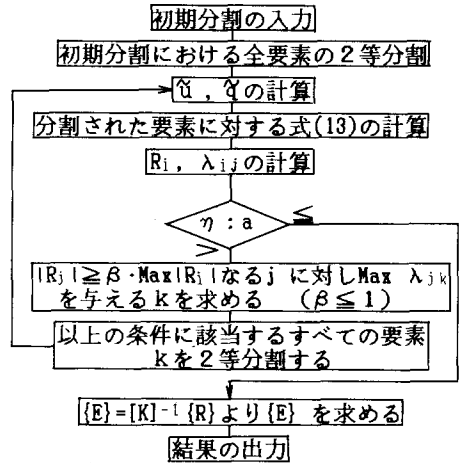


図-1 自動要素分割手順

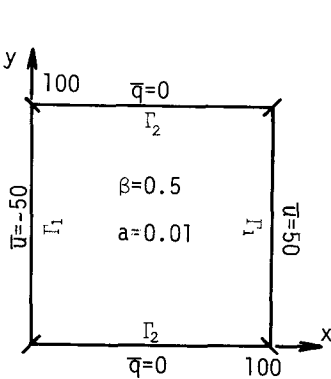


図-2 解析例

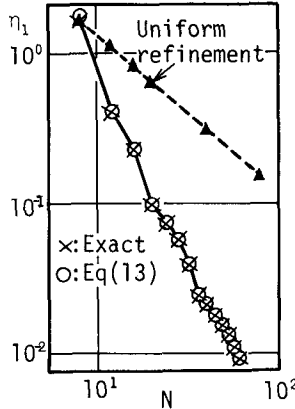


図-3 節点数 N と η_1

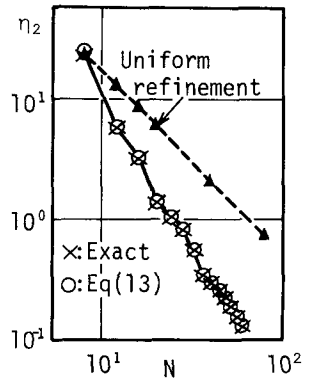


図-4 節点数 N と η_2

5. 結論 積分方程式の離散化に伴う残差 R に基づいた自動要素分割法を示した。ここに示した解析例および他の例から、indicator λ_{ij} が有効に働くことが確認できたが、問題によってはestimator η の評価が適切でないことがわかった。又、 η が精度良く求まる場合には誤差 E_{ui}, E_{qi} も精度良く求めることができた。

(参考文献) 1) Boundary Elements IX, Vol 1: Mathematical and Computational Aspects., Springer-Verlag 1987 2) Iso, Y., Takahashi, S. and Onishi, K., Numerical Convergence of Boundary Solutions in Transient Heat Conduction Problems. In Topics in Boundary Element Research, Vol 3, Springer-Verlag 1987