

I-16

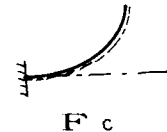
有限変位理論の微分方程式から直接導かれる区間伝達マトリックスについて

岐阜大学 学生員 小川元秀*
岐阜大学 正 員 藤井文夫

序論 平面骨組の有限変位理論を伝達マトリックス法を用いて定式化することのひとつの利点は、区間伝達マトリックスの中の各部分行列に、それぞれつり合い条件（E）、剛体変位（R）、それに弾性変形（DE）と言う明確な物理的意味を持たせることができることである（図1）。これにより特に、全変位を剛体変位と弾性変形とに分離して考える際に、理論的考察が容易となることがある。これまでの研究では剛体変位後の弾性変形を、線形の片持ちはり公式を用いて評価することにより得られた区間伝達マトリックス F_c （文献〔1〕）、それに線形の単純はり公式を適用して得られた F_s （文献〔2〕）がある（図2）。本研究では F_c より有限変位理論の支配微分方程式を導き、この微分方程式に積分公式を適用して積分公式の次数に応じた新たな区間伝達マトリックスを陽な形で求めた。

$$\begin{bmatrix} P b \\ Q b \\ M b \\ U b \\ V b \\ \Theta b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ & DE & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P a \\ Q a \\ M a \\ U a \\ V a \\ \Theta a \end{bmatrix}$$

図1



F_c



F_s

図2

微分方程式 部材長 l を軸線に沿う変数 x と置き換えると、区間伝達関係式は支配微分方程式の級数解の一部（最初の数項）となることはすでによく知られている。そこで x を微小量 dx とし、 dx の2次項以上を無視すると、各状態量 Z の変化率 dZ/dx は容易に求められ、つぎのような有限変位理論のための6元連立微分方程式が得られる。

$$dZ/dx = A(\Theta)Z \dots (1)$$

ただし、一般的な中間荷重（分布荷重）に対処できる荷重項の評価は難しいので、（1）では中間荷重の項は考慮していない。（1）は剛体変位に対する簡単な幾何学的考察と、微小弾性変形に対する片持ちはり公式を用いて求められた F_c から派生したものであるが、これは西野・後藤らが全く別のアプローチから求めた微分方程式と完全に一致する（文献〔4, 6〕）。以下この有限変位理論の連立微分方程式に、オイラー法、2次のルンゲ・クッタ法、3次のルンゲ・クッタ法、そして4次のルンゲ・クッタ法の積分公式を応用して、それぞれ F_{d1} 、 F_{d2} 、 F_{d3} 、そして F_{d4} なる区間伝達マトリックスを得た。ここで注目すべきことは、つぎの点である。①Aの4次以上の項はすべて恒等的にゼロ行列となる。②Aの3次までの項もゼロ係数を多く含むスパースな行列である。③したがって比較的容易に有限変位理論用の区間伝達マトリックスを陽に求めることができ、④なおかつ任意に積分公式の次数を上げてゆくことができる。

またAの次数とDEに含まれる弾性変形の項（伸び剛性EA、および曲げ剛性EI）の分布との間で興味ある対応が見られた（表1）：伸び変形EAはAの一次項ですでに考慮される。これに対して曲げ変形EIはAの3次までの項のなかで逐次考慮され、表1にその対応を示した。これによれば、 F_{d3} 、 F_{d4} 、 F_c 、および F_s の四つの区間伝達マトリックスは、いずれもDEの9個の行列要素のなかに曲げ変形の項を含むが、低次の積分公式による F_{d1} と F_{d2} については、剛体変位後の弾性変形の評価が充分でないことがうかがえる。このことは、これらの区間伝達マトリックスの収束状況にも関連し、かなりの微小要素に分割しないと、良好な

*現在 名古屋大学大学院工学研究科 博士課程前期課程

精度が得られないことになる。

計算例

図3に示すようなピン-剛結のダイヤモンドフレーム（軸方向の変形なし）について有限変位解析を行い、その精度を比較した。 F_{d1} 、 F_{d2} 、 F_{d3} 、 F_{d4} 、そして F_c と F_s の6種類の区間伝達マトリックスによる結果を表2に示す。 F_{d1} と F_{d2} については表1の考察でも述べたように、精度はきわめて悪く、ほとんど実用に供しない。他の4つの区間伝達マトリックスについては、 $F_c < F_s < F_{d3} < F_{d4}$ の順序で高精度となる。特に F_{d3} と F_{d4} の間ではほとんど大差は見られない。その他の考察、 F_{d1} と F_{d2} についての収束状況を検証した例題については、講演当日発表の予定である。

弾性変形 (DE行列の 中のEI分布)	Aの 1次項	2次項	3次項	4次項

弾性変形 (DE行列の 中のEI分布)						
区間伝達行列	F_{d1}	F_{d2}	F_{d3}	F_{d4}	F_c	F_s
Aの最高次数	1次	2次	3次	4次	片持ち梁	単純梁

表1 弾性変形の評価

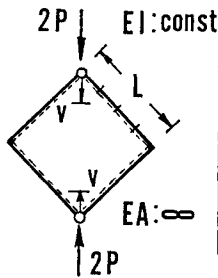


図3 系

PL ²	V/L (4 elements)						EXACT
EI	F_{d1}	F_{d2}	F_{d3}	F_{d4}	F_c	F_s	
1.0	0.227	0.258	0.247	<u>0.247</u>	0.236	0.246	<u>0.24754</u>
2.0	0.523	0.606	0.582	<u>0.582</u>	0.562	0.580	<u>0.58236</u>
3.0	0.739	0.860	0.832	<u>0.831</u>	0.824	0.830	<u>0.83140</u>

表2 精度の比較

結論

有限変位理論の微分方程式に、各種次数の積分公式を適用して区間伝達マトリックスを陽な形で求めることができた。2次までの区間伝達マトリックスは弾性変形の評価が充分でなく、きわめて精度の悪いものである。3次以上になると急激な精度の向上がみられ、これまでの F_c や F_s 以上に高精度な結果となった。微分方程式中のA行列がスパースであるため、 F_{d4} 以外にも F_{d5} 、 F_{d6} ...と任意に次数を上げていても区間伝達マトリックスが陽に求められることに変わりはない。

参考文献

- (1) F. Fujii and San Xia-Gong; "Field transfer matrix for nonlinear curved beams", ST., Proc of ASCE., March 1988, (2) F. Fujii; "A simple mixed formulation for elastica problems", Computers & Structures, Vol. 17, No. 1, 1983, pp. 79-88, (3) 小川元秀 藤井文夫; "有限変位理論のための区間伝達マトリックスの高精度化について", 土木学会中部支部研究発表会概要集, 1988年3月, 金沢大学工学部にて, (4) 西野文雄, 倉方慶夫, 後藤芳顕; "一軸曲げと軸力を受ける棒の有限変位理論", 土木学会論文報告集, 第237号, 1975年5月, pp.11-25, (5) 後藤芳顕, 長谷川彰夫, 西野文雄; "平面骨組の有限変位解析の精度に関する一考察", 土木学会論文報告集, 第331号, 1983年3月, pp.33-44