土木学会第43回年次学術講演会（昭和63年10月）

I-15　３連モーメント定理によるエラスチカアーチのつり合い経路の追跡

岐阜大学　学生員　今井康幸 *
岐阜大学　正　員　藤井文夫

はじめに　Snap-Throughを示すようなアーチにおいては，ひとつの荷重レベルに対して複数個の変形状態が可能となる（図１）。したがって，その荷重一変位挙動を追跡するにあたっては，荷重増分を自動制御するよりは，最も簡単に，ある特定の変位を強制変位として与える変位制御の方が計算戦略としてよく用いられる。ところが荷重に対してプロットする変位によって，Snap-Throughの挙動が現れたり現れなかったりするのは周知の事実である。したがって系や荷重条件が複雑になると，制御すべき変位としてどの変位をとるかが不明となりこの変位制御の方法は一般性に乏しくなることがある。仮にそのような変位が見つかったとしても，荷重・変位ともに一価関数でなくなるSnap-Back やLooping を含むつり合い経路（図１）を追跡することは困難となる。これに対処するためには，いわゆる弧長増分法（Riks-Wempner 法）で代表されるPath-followingタイプの解析手法によらなければならない。

本研究では，軸線の不伸長性を仮定したエラスチカアーチを例に，その複雑なつり合い曲線を安定に探査することができるような解析手段の開発を試みたものである。まずエラスチカアーチの有限変位理論に対する離散化支配方程式を，３連モーメント定理より導いた[1,3]。つぎにその非線形方程式の解法として篠原法[6]を適用し，ルーピングなどのきわめて複雑なつり合い曲線にも追随できることを計算例題で示した。

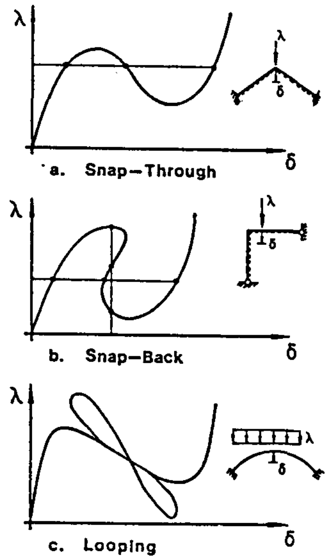

図１　つり合い経路

支配方程式　線形の３連モーメント定理（未知節点変位を含む）の未知量は，部材の材端モーメントと節点変位である。これらの未知量を決める決定条件式は，それぞれ材端での節点回転角の適合条件（連続条件）(a)と節点変位に対応する力のつり合い条件(b)となり，これは一種の混合法である。この線形の３連モーメントにおいては，部材回転角が微小であるとする仮定のもとで，部材回転角と節点変位との間には線形関係(c)が存在する。部材回転角を有限な回転角とする有限変位理論においては，もはやこの(c)の線形関係は成り立たない。そこで本研究では，未知量として節点変位を取るのではなく，部材回転角を直接の未知量として採用することにより，部材回転角と節点変位との間の複雑な非線形関係(c')を回避することができることに注目した。これにより(a)は材端モーメントと部材回転角のふたつの回転量を用いて表現され，(a)は依然線形であるため，(a)から材端モーメントを消去することが可能である。さらに(b)の条件は，少なくともどこかひとつの水平・鉛直節点変位はゼロに拘束されているため，リンク構造全体の水平・鉛直つり合いは恒等的に満足することができる。その代わりに有限変位理論においては，各部材の回転つり合い(d)を満足する必要が生ずる。この(d)が部材回転角に対応する決定条件式となる。(d)では材端モーメントの他にも，外力とアーチの端における水平・鉛直反力も抱き込む必要がある。そこで本研究では簡略のため，ゼロに拘束されている水平・鉛直変位の節点を左（右）端におき，右（左）端の水平・鉛直反力を未知拘束力として導入する。以上

＊現在　名古屋大学大学院　工学研究科　博士課程前期課程

をまとめると３連モーメント定理で有限変位解析を行う際の未知量は，部材回転角（剛体変位を表す）と未知拘束力で，対応する決定条件式は部材の回転つり合い(d)と，右（左）端での支持条件（変位拘束）(e)となる。この非線形の支配方程式を多元連立微分方程式の初期値問題に帰着させ，数値積分することにより解曲線を追跡する。

計算例　参考文献〔２〕より，図２にあるピン―剛結のDaDeppo の円形アーチを解析した。この例題は，有限変位解析ではよく引用され，図３の荷重―変形曲線にも示すように極大点を過ぎるとアーチの耐荷力が急激に低下するの特徴である。極大点後は，わずかながらSnap-Back の挙動がうかがえる。極大点での荷重を1.7 % の誤差で予測できた。数値積分にはEuler 法およびRunge-Kutta 法を用い，必要に応じてNewton-Raphson法の反復計算で累積誤差を除去した。その他のLooping の例題〔4,5 〕は講演当日発表する予定である。

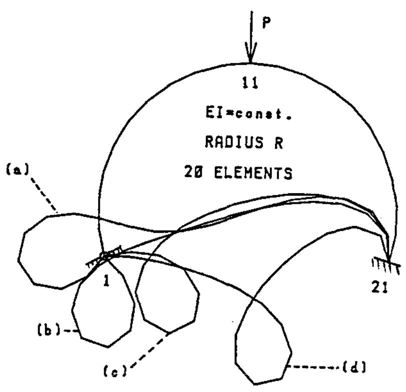

図２　DaDeppo's Arch

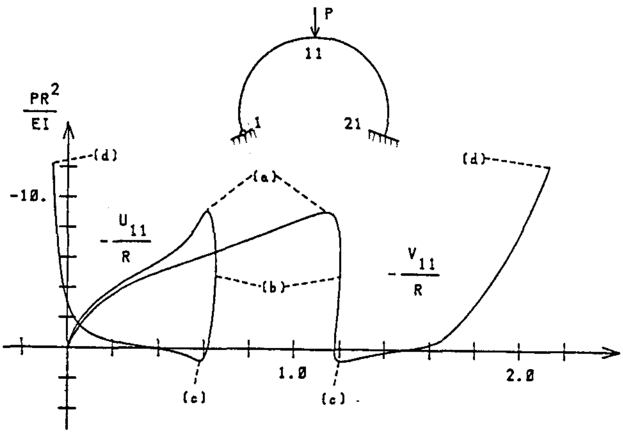

図３　荷重―変位曲線

まとめ　エラスチカアーチの複雑なつり合い曲線を，３連モーメント定理を用いて追跡することの利点はつぎのようである。①部材回転角を直接の未知量としているため，問題の非線形性を低く押さえることができる。②系の全自由度を部材本数と同じ位の大きさに押さえられる。③定式化がきわめ簡単である。④定式化が簡単な割には，高精度な結果が期待できる。

参考文献　〔１〕F. Fujii: "A simple mixed formulation for elastica problems", Computers & Structures, Vol. 17, No.1, pp. 79-88, 1983　〔２〕D.A.Dadeppo and R.Schmidt;"Instability of clamped-hinged circular arches subjected to a point load ", Trans. of ASME., Dec 1975 , pp. 894-896 〔３〕今井康幸　藤井文夫；" ３連モーメント定理によるSnap-back およびLooping を含むElastica解析" 土木学会中部支部研究発表会概要集，1988年3 月，金沢大学工学部にて　〔４〕A.B.Sabir and A.C.Lock;"Large deflexion, geometrically non-linear finite element analysis　of　cirular arches", Int. J. Mech. Science, Vol.15, 1973, pp.37-47　〔５〕H.B.Harrison ; "In-plane stability of parabolic arches", ST, Proc. of ASCE., Vol.108,　Jan.1982, pp.195-205　〔６〕Y. Shinohara,"A geometric method of numerical solution of nonlinear equations and error　estimation by Urabe's proposition", Publications of the Research Institute for Mathematical Science, Kyoto Univ., Series A, Vol. 5, No. 1, 1969