

九州大学 正員 ○ 山口栄輝

A.I.T.

Worsak Kanok-Nukulchai

九州大学 正員 太田俊昭

## 1. まえがき

有限変位解析に関する研究の多くは、Total Lagrangian(T.L.)またはUpdated Lagrangian(U.L.)の手法に基づいており、その定式化はそれぞれの手法に対応する仮想仕事式により行なわれている。これに対して、本報告ではまず第1種Piola-Kirchhoff応力を用いて定式化を行ない、そこで得られた式をもとに、積分変数の変換によりT.L.定式化およびU.L.定式化を試みた。数値計算例として、ここでは平面棒部材の解析を行なった。

## 2. 離散化釣合方程式

第1種P-K応力 $T_{ij}$ を用いた釣合方程式、応力境界条件にGalerkinの重み付き残差法を適用し、アイソパラメトリック要素を用いて離散化すれば次の表現を得る。

$$G^a = \sum_{i=1}^n W_{a,i} (K_{a,i} - R_{a,i}) \quad (1)$$

ここに

$$K_{a,i} = \int_{B^a} T_{ij} N_{a,i} dV \quad (2)$$

$$R_{a,i} = \int_{B^a} \rho_0 b_i N^a dV + \int_{A^a} t_i N^a dA \quad (3)$$

$\rho_0$ は密度、 $b_i$ は体積力ベクトル、 $t_i$ は表面力ベクトル、 $B^a$ は解析対象領域、 $A^a$ はその境界面を表わす。下付き添え字のうち、大文字は物質座標、小文字は空間座標に対応しており、添え字の $a, e$ はそれぞれ変形前の量、一要素当たりの量であることを示す。また $N^a$ は節点 $a$ に対応する形状関数であり、 $n$ は一要素当たりの節点数である。式(1)は一要素における表現であり、これを組み合わせることにより、全領域での離散化表示が得られる。さらに  $W_{a,i}$  が任意であることから、離散化釣合方程式は次のように表示できる。

$$\{K\} - \{R\} = \{0\} \quad (4)$$

第1種P-K応力 $T_{ij}$ と第2種P-K応力 $S_{ij}$ 、Cauchy応力 $\sigma_{ij}$ との関係を用いれば式(2)は次のように書き換えられる。

$$K_{a,i} = \int_{B^a} S_{ij} F_{ij} N_{a,i} dV \quad (5)$$

$$K_{a,i} = \int_{B^a_n} \sigma_{ij} N_{a,i} dV \quad (6)$$

ここに $F_{ij}$ は変形勾配、 $B^a_n$ は変形後の領域を表わしており、式(5)、(6)がそれぞれT.L.定式化、U.L.定式化における表示となる。

## 3. 接線剛性行列

式(4)は非線形方程式であり、その解法には数値解析を必要とする。ここでは、ニュートン・ラブソン法を用いることとする。このため式(2)を変位に関して線形化する必要があるが、超弾性(Hyperelastic)材料を考えると、その線形化表現は次のように得られる。

$$DK^{a,b}_{ij} = \int_{B^a} A_{ijkl} N_{a,i} N_{b,j} dV \quad (7)$$

ここに、 $A_{ijkl}$ は弾性テンソルであり、単位質量当たりのひずみエネルギー $\psi$ を用いると

$$A_{ijkl} = \rho_0 \partial^2 \psi / \partial F_{ij} \partial F_{kl} \quad (8)$$

と定義される。式(7)を応力テンソル間の関係を用いて変形すれば

$$DK^{a,b}_{ij} = \int_{B^a} (\delta_{ij} S_{kl} + C_{ijkl} F_{kl}) N_{a,i} N_{b,j} dV \quad (9)$$

$$DK^{a,b}_{ij} = \int_{B^a_n} (\delta_{ij} \sigma_{kl} + C_{ijkl}) N_{a,i} N_{b,j} dV \quad (10)$$

が得られる。ここに

$$C_{IKJL} = \rho_0 \partial^2 \psi / \partial E_{IK} \partial E_{JL} \quad (11)$$

$$C_{KIJL} = J^{-1} C_{IKJL} F_{K1} F_{I1} F_{J1} F_{L1} \quad (12)$$

であり、 $E_{IJ}$ はグリーンのひずみテンソル、また  $J = |F_{IJ}|$  である。式(9)、(10)がそれぞれT.L.定式化、U.L.定式化における要素接線剛性行列である。

#### 4. 数値計算例

定式化の過程より明かなように、非線形釣合方程式、接線剛性行列ともに、T.L.、U.L.の2つの定式化で得られるものは、数学的に等価である。しかし、式(12)より理解されるように、解析で用いる構成則によっては数値計算効率に大きな差が生じることも考えられる。そこで本報告の解析例では、T.L.定式化には $C_{IKJL}$ が定数である材料(MATE.1)を、U.L.定式化には $C_{KIJL}$ が定数である材料(MATE.2)を考え、平面棒部材の解析を行なった。

解析に際しては Fig.1に示す6節点要素を用いた。この要素は、平面棒部材の解析において精度の良い解を与えることが報告されている<sup>1)</sup>。まず3要素を用いて片持ち梁の解析を行なった。解析結果は、楕円積分による解析解<sup>2)</sup>とともにFig.2に示している。少ない要素数にもかかわらず T.L.定式化、U.L.定式化のいずれの解も解析解と良く一致している。図中には収束値を得るのに要した繰り返し計算回数も示している。収束条件は  $|\{\Delta U\}| / |\{U^{(n)}\}| < 10^{-5}$  とした。次に6要素を用いてアーチの解析を行なった。結果はFig.3に示しているが、2つの定式化のいずれの解も解析解<sup>3)</sup>と良く一致している。この2例において解の精度、繰り返し計算回数を見る限り、T.L.定式化とU.L.定式化の間に大きな差は認められなかった。今後は計算効率に関して、さらにこの2つの定式化を比較する予定である。

#### 参考文献

- 1) Kanok-Nukulchai et al., Generic Formulation Procedure for Large Deformation Analysis of Structural Elements, JSCE, No.368/I-5, pp.65-73, 1986.
- 2) Mattiasson, K., Numerical Results from Large Deflection Beam and Frame Problems Analysed by means of Elliptic Integrals, IJNME, 17, pp.145-153, 1981.
- 3) DaBeppo et al., Instability of Clamped-Hinged Circular Arches Subjected to a Point Load, JAM, 42, pp.894-896, 1975.

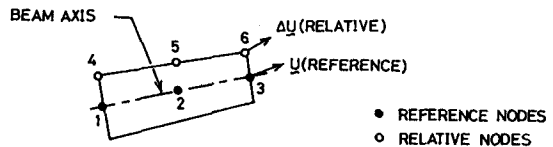


Fig.1 Typical B6 beam element

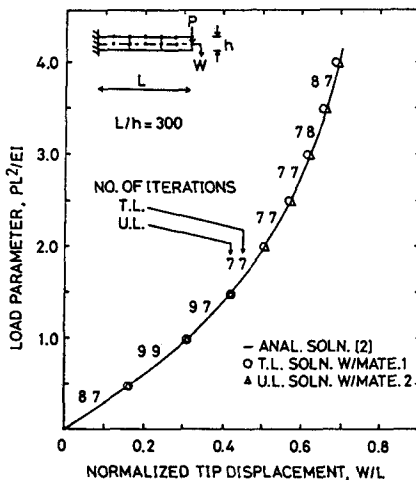


Fig.2 Load-displacement curve of a cantilever beam

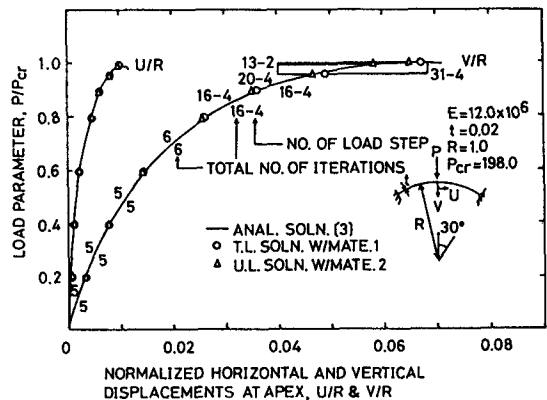


Fig.3 Load-displacement curve of a clamped-hinged arch