

法政大学 正会員 ○阿井 正博
 東京大学 正会員 西野 文雄

1. はじめに。 ケーブル構造の実用においては、その構造特性により、常に形状決定の問題が関与する。各ケーブルを引張直線部材とする変位法ケーブル構造モデルの上での、この問題に関する組織的展開としては例えば文献[1]の研究があるが、ここでは、同構造モデルにおける別の形状決定の一手法を考える。

2. 形状決定問題での基本線形化式。 所定外力条件下でのつり合い状態の自由節点位置や部材張力等を、部材長を選択することにより制御する形状決定の問題を考えるものとする。その基本式としての既知のつり合い状態での部材長の微小変化に対する被制御量の変化を表す線形式は、次のように展開される。

つり合い状態において、最初に、自由節点の位置 $\{x_j\}$ を空間に固定した上で部材長 $\{l_{(m)}\} = \{l_{(m)}, m=1, \dots, M\}$ の微小変化を考える。このときの部材張力変化 $\delta\{T_{(m)}\}_{Fix}$ は、各要素での構成式: $T = EA/l \cdot \Delta l$ ($\Delta l \geq 0$), $=0$ ($\Delta l < 0$) (ただし、 l =部材長, Δl =伸び)

$$\delta\{T_{(m)}\}_{Fix} = [\kappa^*_{(m)}] \delta\{l_{(m)}\} \dots \dots \dots (1)$$

$$\delta\{\bar{T}_{(m)}\}_{Fix} = [q_{F(m)}] \delta\{T_{(m)}\}_{Fix} \dots \dots \dots (2)$$

$$\delta\{\underline{F}_j\}_{Fix} = [C_F] [\bar{S}_F] [q_{F(m)}] [\kappa^*_{(m)}] \delta\{l_{(m)}\} \dots \dots (3)$$

$$\delta\{\underline{P}_j\} = [C_F] [W_N^{(m)}] \delta\{l_{(m)}\} \dots \dots \dots (4)$$

ただし、 $[q_{F(m)}]$ は、 $[q_{F(m)}]$, $m=1, \dots, M$, を対角成分とするマトリックス。対応する自由節点力の変化は、全節点力に対する接続マトリックス $[\bar{S}_F]$ と自由節点を取り出す $[C_F]$ を用いて、式(3)で表される。また、ケーブルの自重を両端節点での集中外力として考慮する場合には、 $\delta\{l_{(m)}\}$ による節点外力 $\{\underline{P}_j\}$ の変化は式(4)で表される。ここに、 $[W_N^{(m)}]$ は、全節点数 $N \times$ 空間3成分の行数 \times 全部材数 (M) の列数のマトリックスであり、各部材 (m) の列はその両端節点の z -方向(重力方向)に対応する行位置にのみ $w_{(m)}/2$ の成分を含む ($w_{(m)}$ は部材の単位長さ重量)。

つり合い状態 $\{F_j\} = \{P_j\}$ から、節点位置を固定した上での式(3)の $\delta\{F_j\}_{Fix}$ と式(4)の $\delta\{P_j\}$ が生じている状態は不つり合いとなり、実際にはこれらの $\delta\{F_j\}_{Fix}$ と $\delta\{P_j\}$ を打ち消すように自由節点位置の微小変化 $\delta\{x_j\}$ が生じて新しいつり合い状態になる: 接線剛性 $[K_j]$ を用いて、 $\delta\{F_j\}_{Fix} + [K_j] \delta\{x_j\} = \delta\{P_j\}$ 。これより、部材長の微小変化によるつり合い状態の上での自由節点位置の変化は

$$\delta\{x_j\} = [K_j]^{-1} [C_F] ([W_N^{(m)}] - [\bar{S}_F] [q_{F(m)}] [\kappa^*_{(m)}]) \delta\{l_{(m)}\} \dots \dots \dots (5)$$

として求められる。他の諸量の $\delta\{l_{(m)}\}$ による微小変化は、式(5)の結果を基にして展開することができる。

3. 形状決定に関する繰り返し計算。 形状決定において制御される量として、ここでは、自由節点の空間座標、部材張力、部材張力空間成分の中よりある S 個を選び出し、それらの組を $\underline{Y} = \{Y_1, \dots, Y_S\}$ と表す。また、この \underline{Y} が所用値 \underline{Y}^* となるように制御する量としては同数 S 個の部材の無効力時の長さを考えるものとし、その組を $\underline{X} = \{X_1, \dots, X_S\}$ と表す。所定の外力 $\{P_j^*\}$ のもとで、 X の部材長の構造系のつり合い形状を変位解析により求めれば、そのときの被決定量の所用値との差 $\Delta \underline{Y} = \underline{Y} - \underline{Y}^*$ を知ることができ、式(5)等で表される $\delta\{l_{(m)}\}$ に対する線形式より、 \underline{Y} に対応する行および \underline{X} に対応する列成分を選び出して $\underline{Y}-\underline{X}$ 間の接線係数マトリックス $[\partial \underline{Y} / \partial \underline{X}]$ が得られる。それにより、Newton-Raphson法系の繰り返し計算による形状決定の手順が考えられる。

形状決定での誤差評価。- 変位解析において、外力 $\{P_j\}$ に対して、ある節点位置 $\{x_j\}$ での節点力と接線剛性をそれぞれ $\{F_j\}$, $[K_j]$ とするとき、節点の不つり合いベクトル $\Delta\{F_j\} = \{F_j\} - \{P_j\}$ に対するスカラー量 $\Delta W = 1/2 \cdot \Delta\{F_j\}^T [K_j]^{-1} \Delta\{F_j\}$ は次の物理的意味を持つ。すなわち、 ΔW は、 $\{P_j\}$ に対する現 $\{x_j\}$ での全ポテンシャル・エネルギーの真のつり合い状態でのその最小値からの差の第一近似を表す。これより、ベクトル $\Delta\{F_j\}$ と同次のスカラー不つり合い誤差として $R = \sqrt{\Delta\{F_j\}^T [K_j]^{-1} \Delta\{F_j\}}$ が考えられる。文献[3]では、この R を用いた強非線形つり合い経路に対する一つの繰り返し計算手順が述べられている。本文での形状決定に関する繰り返し計算は、そこでの考え方を次のように一般化したものである。

所定外力 $\{P_j^*\}$ のもとで、ある部材長 X でのつり合い状態において、形状決定に関する不一致 $\Delta \underline{Y} = \underline{Y} - \underline{Y}^*$ が生じているものとする。このとき、最初に、座標成分が形状決定として規定されている自由節点は、つり合い状態の位置よりその所用の位置に強制的に移動させる; 次に、引張力あるいはその空間成分が規定されて

いる要素は、部材力や同成分をその規定値に変更する。その結果としての節点力 $\{F_J^S\}$ は外力 $\{P_J^S\}$ と明らかに不釣り合い状態となり、その不釣り合い力 $\Delta\{F_J^S\} = \{F_J^S\} - \{P_J^S\}$ をもとの釣り合い状態での接線剛性で(前述の R と同様に) $R^S = \sqrt{\Delta\{F_J^S\}^T [K_J]^{-1} \Delta\{F_J^S\}}$ と評価して、形状決定でのスカラー誤差とすることができる。すなわち、 X_{i1} と X_{i+1} の部材長に対する R^S と R^{S+1} において $R^S > R^{S+1}$ であるとき、 X_{i+1} での釣り合い状態の方が X_{i1} のそれより所用状態に近いと判断するものとする。

繰り返し計算手順。- 繰り返し回数 $[i]$ での部材長 X_{i1} に対する釣り合いでの形状決定における不一致量と接線係数をそれぞれ ΔY_{i1} と $[\partial Y / \partial X]_{i1}$ として、不一致量全体 ΔY_{i1} ではなく、その一部 $\phi_{i1} \Delta Y_{i1}$ ($0 < \phi_{i1}$) を式(6)のように修正する改良Newton-Raphson法

$$X_{i+1} = X_{i1} - \phi_{i1} [\partial Y / \partial X]_{i1}^{-1} \Delta Y_{i1} \dots (6)$$

を考える。この場合、考える領域で X と Y とに一对一の対応があれば、 ϕ_{i1} の十分小さい範囲で、修正される量そのものは小さいものの、 ΔY の各成分が $|\Delta Y_{s(i+1)}| < |\Delta Y_{s(i)}|$, $s=1, \dots, S$ となることがいえる。各回数での

$$\phi_{i1} = \min. \left(\frac{\phi_0 R^S_{i0}}{R^S_{i1}}, 1 \right) \dots \dots (7)$$

ϕ_{i1} は、具体的には、先に定義した換算スカラー誤差 R^S を指標として、 $0 < \phi_0 \leq 1$ の範囲で ϕ_0 を初回値として選んだ後、 $\phi_{i1} R^S_{i1}$ が $[i]$ に関わらず一定となるように式(7)で決定するものとしている。このとき、 $R^S_{i1} < \phi_0 R^S_{i0}$ となる程度に収束が進めば、1より大きい ϕ_{i1} は無意味であるので、 $\phi_{i1} = 1$ として一般のNewton-Raphson法での計算に引き継がれる。また、式(6)と(7)で得られる $[i+1]$ の X に対する換算誤差 R^S_{i+1} を求めたのち、 $R^S_{i+1} < R^S_{i1}$ で収束傾向を確認するものとし、これを満たさない時には、 ϕ_0 がなお大きすぎるものと判断して例えば $\phi_0 \rightarrow \phi_0/2$ と修正した後、最初より(あるいは、前回 $[i]$ より)計算をやり直すものとする。

初期値 $X_0 = X_{i0}$ での $Y_0 = Y_{i0}$ と所用値 Y^* とを結ぶ線形経路 $Y(\alpha) = Y_0 + \alpha(Y^* - Y_0)$ ($0 \leq \alpha \leq 1$) に対応する初期釣り合い状態から最終の釣り合い状態への連続を考えると、換算誤差 $R^S(\alpha)$ が経路上 $0 \leq \alpha \leq 1$ で単調減少であれば、 ϕ_0 さえ小さく選べば各繰り返しの釣り合い状態がこの経路にいくらかでも近づくことより、以上の繰り返し計算の収束は保証される。

4. 数値計算例. Fig.1のケーブルガーターの形状決定を行った。弾性定数を1600. ton/cm²、主ケーブルと中間ケーブルの断面積は、4.91, 1.77cm²としている。

目的状態として、No. 1-14の自由節点を水平方向に等間隔、(4)と(12)部材の張力水平成分を5.0ton、(17)-(23)部材の張力鉛直成分を0.5tonに指定して、全23部材の無応力時長さを求める問題とした。初期状態値としては、Fig.2の節点位置で主ケーブルと中間ケーブルの張力が、それぞれ、5., 0.5tonとなるように初期部材長を与えた。

$\phi_0 = 0.05$ で計算したときの、途中釣り合形状をFig.3に、誤差 R^S の収束過程をFig.4(○印)に示す。計算の結果、対称1/4部分で、(1)-(4), (17)-(20)の部材長: 5.2936, 5.1505, 5.0527, 5.0031, 8.4985, 5.9989, 4.4992, 3.9993m, No. 11-14節点のy-座標: 2.00, 2.25, 3.00, 4.25m, が得られた。

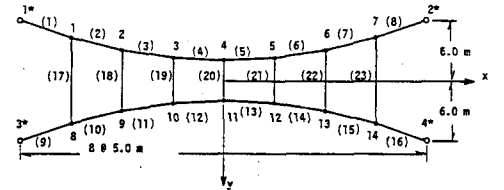


Fig. 1 Final Equilibrium Configuration

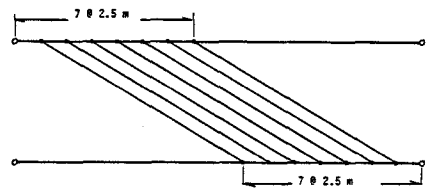


Fig. 2 Initial Equilibrium Configuration

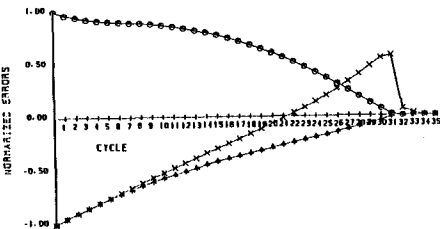


Fig. 4 Convergence Process

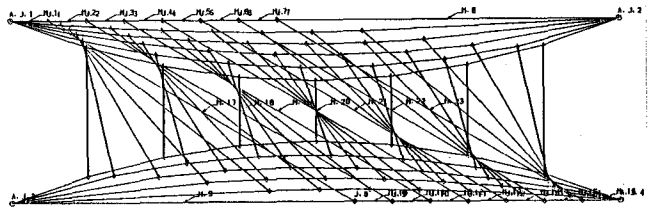


Fig. 3 Configurations at Every 7 Steps

(参考文献) 1) 波田凱夫・中西宏: 吊構造の形状決定計算に関する一考察, 日本建築学会論文報告集, No. 212, 1973-10. 2) 阿井正博・西岡隆・奥村敏恵: ケーブル構造に関する一理論解析, 土木学会論文報告集, No. 260, 1977-4. 3) 阿井正博・西野文雄: 離散化幾何学的非線形問題での静的応答に関する数値解析について, 土木学会論文報告集, No. 320, 1982-4.