I-8　　平板の連成熱弾性振動解析

呉工業高等専門学校　正会員　丸上　晴朗
山梨大学　工学部　正会員　平島　健一

1．緒言　一昨年，昨年の当講演会ではりおよび平板の連成熱弾性振動解析について発表した．[1,2] 一昨年は理論面においては解析手法としての一般化高次理論の二次元化支配式の誘導の概要と，理論の適用例として単純ばりの連成熱弾性自由振動の固有円振動数の計算結果を発表した．昨年は一昨年の支配式を無次元化支配式に改めてはりと平板の無次元化固有円振動数の計算結果について発表した．一昨年，昨年に発表した数値計算結果は狭い範囲に限定されていたので，今年は平板について範囲を少し広くして数値計算を行った．主として数値計算結果について発表する．一般化高次理論の解析手法をはり・平板の静的・動的解析に適用して良好な解析結果をすでに得ているので，[3,4] 本研究では次の段階として本手法を連成熱弾性振動解析に適用した場合の解析結果がどうなるかを検討している．このためには他理論による解析も行い，各理論ごとの解析結果を求め，これらの諸結果の比較・考察を通じて各解析手法の解析精度・特徴などを把握するようにしている．冒頭に示したように高次理論の概要については発表ずみであるので，高次理論以外の解析理論の概要について次節で述べる．なお平板は一定厚さで等質等方と仮定する．

2．高次理論以外の解析理論の概要　平板の面外（曲げ）挙動の典型的な動的解析理論としては，せん断変形と回転慣性の影響を考えない場合には古典理論を，考える場合にはMindlin型理論を挙げることができる．現在の研究段階ではMindlin型理論を用いた数値計算結果だけしか求めていないのでこの理論についてのみ略述する．二種類のMindlin型理論を用いた．第一の理論（TYPE NO.1 と名付ける．）は次の通りである．物理量（変位，熱流束，温度，熱源）を次式で表す．

$$(u_\alpha, q_\alpha, T, g)=z(u_\alpha^{(1)}, q_\alpha^{(1)}, T^{(1)}, g^{(1)}),\ u_z=u_z^{(0)}\equiv w_0,\ q_z=q_z^{(0)}. \quad \cdots\cdots (1)$$

上式，式(2) 及び式(3) において α=x又はy とする．

修正Fourier法則（熱の伝導法則），エネルギー方程式，Hamilton の原理から求めた変位・応力場の支配式の全ての式を高次理論の考え方に従って二次元化した式〔(x,y) とt の式〕で表す．これに式（1）を代入すると支配式が求まる．この式に次の式（2）で表される無次元量を代入すると式（3）で示される無次元化支配式が求まる．

$$\bar{x}=x/l_x,\ \bar{y}=y/l_y,\ \bar{u}=u_x^{(1)},\ \bar{v}=u_y^{(1)},\ \bar{w}=w_0/b,\ \bar{q}_\alpha=bl_\alpha q_\alpha^{(1)}/(\kappa T_0),\ \bar{q}_z=bq_z^{(0)}/(\kappa T_0),\ \bar{T}^{(1)}=bT^{(1)}/T_0,\ \bar{t}=\kappa t/(\rho b^2 c_v),$$
$$\bar{\omega}=\rho b^2 c_v \omega/\kappa. \quad \cdots\cdots (2)$$

l_α ：α軸方向の長方形板の辺長，b：板厚2bの半分，κ ：熱伝導率，T_0 ：基準温度，ρ ：密度，c_v：等積比熱．無熱源，無載荷（自由振動）とし，自重の影響を無視した場合の無次元化支配式は次のようになる．

$$\gamma_3\bar{q}_{\alpha,\bar{t}}+\bar{q}_\alpha+\bar{T}^{(1)}_{,\bar{\alpha}}=0,\ \gamma_3\bar{q}_{z,\bar{t}}+\bar{q}_z+\bar{T}^{(1)}=0,\ \bar{b}_x^2\bar{q}_{x,\bar{x}}+\bar{b}_y^2\bar{q}_{y,\bar{y}}+\bar{T}^{(1)}_{,\bar{t}}+\gamma_1(\bar{b}_x\bar{u}_{,\bar{x}\bar{t}}+\bar{b}_y\bar{v}_{,\bar{y}\bar{t}})=0,\ \bar{b}_x^2\bar{w}_{,\bar{x}\bar{x}}+\bar{b}_y^2\bar{w}_{,\bar{y}\bar{y}}+\bar{b}_x\bar{u}_{,\bar{x}}+\bar{b}_y\bar{v}_{,\bar{y}}=\gamma_2\bar{w}_{,\bar{t}\bar{t}},\ (2+\bar{\lambda})\bar{b}_x^2\bar{u}_{,\bar{x}\bar{x}}+(1+\bar{\lambda})\bar{b}_x\bar{b}_y\bar{v}_{,\bar{x}\bar{y}}+\bar{b}_y^2\bar{u}_{,\bar{y}\bar{y}}-(2+3\bar{\lambda})\hat{\alpha}T_0\bar{b}_x\bar{T}^{(1)}_{,\bar{x}}-3(\bar{u}+\bar{b}_x\bar{w}_{,\bar{x}})=\gamma_2\bar{u}_{,\bar{t}\bar{t}},\ \bar{b}_x^2\bar{v}_{,\bar{x}\bar{x}}+(1+\bar{\lambda})\bar{b}_x\bar{b}_y\bar{u}_{,\bar{x}\bar{y}}+(2+\bar{\lambda})\bar{b}_y^2\cdot\bar{v}_{,\bar{y}\bar{y}}-(2+3\bar{\lambda})\hat{\alpha}T_0\bar{b}_y\bar{T}^{(1)}_{,\bar{y}}-3(\bar{v}+\bar{b}_y\bar{w}_{,\bar{y}})=\gamma_2\bar{v}_{,\bar{t}\bar{t}}. \quad \cdots\cdots (3)$$

ここに，$\gamma_1=(3\lambda+2G)\hat{\alpha}/(\rho c_v)$，$\gamma_2=(\kappa/b c_v)^2/(G\rho)$，$\gamma_3=(\tau_0\kappa)/(\rho b^2 c_v)$，$\bar{b}_\alpha=b/l_\alpha$，$\bar{\lambda}=\lambda/G$　（λ，G はLaméの定数），τ_0＝緩和時間．

次に第二の理論（TYPE NO.2 と名付ける．）について述べる．垂直応力 σ_{zz} をReissnerの考え方に従って平板上下表面での境界条件として与えられる σ_{zz}^{+}(上表面)，σ_{zz}^{-}(下表面）を基準として板厚方向の σ_{zz} の分布を仮定する場合の高次理論を考えてこれに式（1）を代入すると，式（3）中の式 $(3)_{1,2,3}$はこのままで変化はなく，残りの式 $(3)_{4,5,6}$は次の式（4）となる．

$$\kappa^2(\bar{b}_x^2\bar{w}_{,\bar{x}\bar{x}}+\bar{b}_y^2\bar{w}_{,\bar{y}\bar{y}}+\bar{b}_x\bar{u}_{,\bar{x}}+\bar{b}_y\bar{v}_{,\bar{y}})=\gamma_2\bar{w}_{,\bar{t}\bar{t}},\ 4(\lambda+G)/(\lambda+2G)\bar{b}_x^2\bar{u}_{,\bar{x}\bar{x}}+\bar{b}_y^2\bar{u}_{,\bar{y}\bar{y}}+(3\lambda+2G)/(\lambda+2G)\bar{b}_x\bar{b}_y\bar{v}_{,\bar{x}\bar{y}}-2(3\lambda+2G)/(\lambda+2G)\hat{\alpha}T_0\bar{b}_x\bar{T}^{(1)}_{,\bar{x}}-3\kappa^2(\bar{u}+\bar{b}_x\bar{w}_{,\bar{x}})=\gamma_2\bar{u}_{,\bar{t}\bar{t}},\ \bar{b}_x^2\bar{v}_{,\bar{x}\bar{x}}+4(\lambda+G)/(\lambda+2G)\bar{b}_y^2\bar{v}_{,\bar{y}\bar{y}}+(3\lambda+2G)/(\lambda+2G)\bar{b}_x\bar{b}_y\bar{u}_{,\bar{x}\bar{y}}-2(3\lambda$$

$+2G)/(\lambda+2G)\,\alpha T_0 \bar{b}_y \bar{T}^{(1)}_{,\bar{y}} - 3\kappa^2(\bar{v}+\bar{b}_y \bar{w}_{,\bar{y}}) = \gamma_2 \bar{v}_{,\bar{t}\bar{t}}$. ………………………………………… （4）

なお上式中の γ_2 は式（3）と同じであるが，$\kappa^2(=\pi^2/12)$ はせん断補正係数である．式（3），（4）の解は次のように表すことができる．

$\bar{u}=U\cos m\pi\bar{x}\ \sin n\pi\bar{y}\ \exp(i\ \bar{\omega}_{mn}\bar{t})$, $\bar{v}=V\sin m\ \pi\bar{x}\ \cos n\pi\bar{y}\ \exp(i\ \bar{\omega}_{mn}\bar{t})$, $\bar{w}=W\sin m\ \pi\bar{x}\ \sin n\pi\bar{y}\ \exp(i\ \bar{\omega}_{mn}\bar{t})$, $\bar{q}_x=Q_x\cos m\ \pi\bar{x}\ \sin n\pi\bar{y}\ \exp(i\ \bar{\omega}_{mn}\bar{t})$, $\bar{q}_y=Q_y\sin m\ \pi\bar{x}\ \cos n\pi\bar{y}\ \exp(i\ \bar{\omega}_{mn}\bar{t})$, $\bar{q}_z=Q_z\sin m\ \pi\bar{x}\sin n\ \pi\bar{y}\ \exp(i\ \bar{\omega}_{mn}\bar{t})$, $\bar{T}^{(1)}=\Theta\sin m\pi\bar{x}\ \sin n\pi\bar{y}\ \exp(i\ \bar{\omega}_{mn}\bar{t})$. ………………………………………… （5）

式（5）の解を支配式（3），又は式 $(3)_{1,2,3}$ と式（4）で表される支配式に代入して係数 U, V, W, Q_x, Q_y, Q_z，Θ に関する振動数方程式を求める．この式は $mb/l_x, nb/l_y$ を含むので，数値計算においては，$\phi\equiv mb/l_x=nb/l_y$ をパラメーターに選んで計算する．

3．数値計算例　四辺単純支持長方形板の自由振動において自重の影響を無視し，無熱源として高次理論及びMindlin 型理論（TYPE NO.1,NO.2）によって求めた無次元化固有円振動数 $\bar{\omega}$ の値を次表に示す．

ϕ	次数	Mindlin TYPE No.1	Mindlin TYPE No.2	高次理論
0.05	1 2 (3)	$0.1764\times10^5+0.7239\times10^{-3}i$ $0.5462\times10^6+0.5296\times10^{-4}i$ 0.5272×10^6	$0.1473\times10^5+0.4777\times10^{-3}i$ $0.4926\times10^6+0.2932\times10^{-4}i$ 0.4790×10^6	$0.1468\times10^5-0.9747\times10^{-3}i$ $0.491\ \ \times10^6+$ * 0.4791×10^6
0.1	1 2 (3)	$0.6334\times10^5+0.2441\times10^{-2}i$ $0.6082\times10^6+0.6665\times10^{-3}i$ 0.5399×10^6	$0.5355\times10^5+0.1651\times10^{-2}i$ $0.5420\times10^6+0.3769\times10^{-3}i$ 0.4929×10^6	* * 0.4930×10^6
0.3	1 2 (3)	$0.3360\times10^6+0.9475\times10^{-2}i$ $0.1032\times10^7+0.1849\times10^{-1}i$ 0.6599×10^6	$0.2952\times10^6+0.7104\times10^{-2}i$ $0.8851\times10^6+0.1115\times10^{-1}i$ 0.6220×10^6	$0.3032\times10^6-0.9855\times10^{-2}i$ $0.85\ \ \times10^6+$ * 0.6221×10^6
0.5	1 2 (3)	$0.6219\times10^6+0.1300\times10^{-1}i$ $0.1549\times10^7+0.6470\times10^{-1}i$ 0.8505×10^6	$0.5549\times10^6+0.1038\times10^{-1}i$ $0.1308\times10^7+0.4033\times10^{-1}i$ 0.8214×10^6	$0.58\ \ \times10^6+$ * * $0.82\ \ \times10^6$
1.0	1 2 (3)	$0.1314\times10^7+0.1565\times10^{-1}i$ $0.2932\times10^7+0.2951\times10^0\ i$ 0.1440×10^7	$0.1186\times10^7+0.1321\times10^{-1}i$ $0.2448\times10^7+0.1896\times10^0\ i$ 0.1423×10^7	$0.1273\times10^7+0.0950\times10^{-1}i$ * 0.1423×10^7
3.0	1 2 (3)	$0.4015\times10^7+0.1671\times10^{-1}i$ $0.8637\times10^7+0.2780\times10^1\ i$ 0.4058×10^7	$0.3639\times10^7+0.1445\times10^{-1}i$ $0.7179\times10^7+0.1811\times10^1\ i$ 0.4052×10^7	* * $0.40\ \ \times10^7$
5.0	1 2 (3)	$0.6701\times10^7+0.1680\times10^{-1}i$ $0.1437\times10^8+0.7753\times10^1\ i$ 0.6727×10^7	$0.6076\times10^7+0.1457\times10^{-1}i$ $0.1194\times10^8+0.5056\times10^1\ i$ 0.6724×10^7	$0.6688\times10^7+0.4917\times10^{-1}i$ * 0.6724×10^7
10.0	1 2 (3)	$0.1341\times10^8+0.1684\times10^{-1}i$ $0.2873\times10^8+0.3106\times10^2\ i$ 0.1342×10^8	$0.1216\times10^8+0.1461\times10^{-1}i$ $0.2387\times10^8+0.2027\times10^2\ i$ 0.1342×10^8	* * 0.1342×10^8
50.0	1 2 (3)	$0.6707\times10^8+0.1685\times10^{-1}i$ $0.1436\times10^9+0.7769\times10^3\ i$ 0.6707×10^8	$0.6083\times10^8+0.1463\times10^{-1}i$ $0.1193\times10^9+0.5070\times10^3\ i$ 0.6707×10^8	* * 0.6707×10^8

本表の高次理論の欄で＊印を付けている部分は現在計算値が求まっていないので，今後引続いて計算を行う．次数欄（3）の固有値は実数なので無減衰振動を表す解であって本研究主目的からは重要度の低い解であるが，各理論の比較上の参考として示した．

4．結言　表の数値から次のことが言える．

1．両Mindlin 型理論ともに減衰振動解を与えるが，数値的には差がある．

2．高次理論解の虚数部の符号が ϕ の小なる場合に負となり振動の発散解を与えるので今後この面の検討を行い，さらに＊部の数値，振動モード形等を求める．

参考文献：(1) 丸上，平島；非定常熱弾性特性を考慮した平板の高次理論と連成熱振動解析，土木学会41回年講，Ｉ－6.(2) 丸上，平島；高次理論による平板の連成熱弾性振動解析，土木学会42回年講，Ｉ－4.(3) 平島，根岸；板厚方向の成分を考慮した代表的な二次元化平板理論の精度に関する考察，土木学会論文集330 号.(4)平島，根岸；数種の平板理論の動特性(自由振動と分散特性)に関する研究，土木学会論文集333号.