

I-7

厚板理論による扇形平板の熱応力解析について

北見工業大学 正員 奥村 勇

1. まえがき 平板の曲げは、構造力学における主要な研究課題であり、古くから、多くの研究者により取り扱われている。平板の中でも、比較的厚いいわゆる厚板に関する研究も、E.Reissner或いはR.Mindlinに代表される様に、古くから、精力的な研究が続けられ、最近では、直交異方性矩形厚板の曲げに関する研究も幾つか報告されている。厚板の曲げに関しては、表面荷重による曲げが大多数であるが、板の上、下面の温度差による曲げ、すなわち、熱応力の解析もまた重要な課題である。薄板の熱応力については、現在では、直交異方性平板の解析がすでになされているが、厚板の熱応力に関する研究は、現時点でも、あまり見当らない様である。厚板の熱応力解析においても、3次元応力解析が最も望ましい方法であるが、この方法では、表面荷重による曲げと同様に、板厚が極端に大きい場合以外には、実際上解析が困難になる。

本研究は、著者が先に提案した一厚板理論を発展させて、扇形厚板の定常熱応力解析を行うものである。板の上、下面における境界条件は、熱弾性変位ポテンシャルを併用した3次元弾性解により満たし、板の周辺における境界条件は、厚板の平面応力解及び一般化平面応力解により満たすという厚板の表面荷重による曲げからの素直な発展である。

2. 温度場 図-1に示した扇形厚板を解析の対象にすると、定常状態を考えているので、温度 T は、時刻に無関係であり、次式で表わされる調和関数になる。

$$T = \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \cos m\theta [J_m(\alpha_{ms}r) \{ N_{ts}^{(1)} \cosh \alpha_{ms}z + R_{ts}^{(1)} \sinh \alpha_{ms}z \} + Y_m(\alpha_{ms}r) \{ N_{ts}^{(2)} \cosh \alpha_{ms}z + R_{ts}^{(2)} \sinh \alpha_{ms}z \}] \quad (1)$$

ここで、 $\alpha_{ms} = \lambda_{ms}/a$, $m = t\pi/\gamma$ ($t=1, 2, \dots$),
 $a \leq r \leq b$, $-\gamma/2 \leq \theta \leq \gamma/2$, $-h/2 \leq z \leq h/2$ (2.a~e)

温度 T に関する境界条件として、次式を考える。

$z = h/2$ において、 $T = g(r, \theta)$; $z = -h/2$ において、 $T = 0$; $r = a$ 及び $r = b$ において、 $T = 0$ (3.a~c)

上式の境界条件を式(1)の T に課すると、未定定数が定められ、温度 T は、次式の様に求められる。

$$T = \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{f_{ts}}{2} \cos m\theta C_m(\alpha_{ms}r) \left[\frac{\cosh \alpha_{ms}z}{\cosh(\alpha_{ms}h/2)} + \frac{\sinh \alpha_{ms}z}{\sinh(\alpha_{ms}h/2)} \right] \quad (4)$$

ここで、 $C_m(\alpha_{ms}r)$ は、円柱関数であり、また、 f_{ts} は、 $g(r, \theta)$ をBessel展開した時のFourier係数である。

3. 特殊解 板の上、下面における境界条件を満足するために、特殊解が必要になるが、著者が先に提案した次の解を用いる。

$$2Gu_r = \frac{\partial}{\partial r} \left[\phi_0 + r \frac{\partial \phi_1}{\partial r} + z \frac{\partial \phi_3}{\partial z} - 4(1-\nu)\phi_1 \right] + \frac{2}{r} \frac{\partial \phi_2}{\partial \theta} + \frac{\partial \chi}{\partial r} \quad (5.a)$$

$$2Gu_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\phi_0 + r \frac{\partial \phi_1}{\partial r} + z \frac{\partial \phi_3}{\partial z} - 4(1-\nu)\phi_1 \right] - 2 \frac{\partial \phi_2}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial \theta} \quad (5.b)$$

$$2Gu_z = \frac{\partial}{\partial z} \left[\phi_0 + r \frac{\partial \phi_1}{\partial r} + z \frac{\partial \phi_3}{\partial z} - 4(1-\nu)\phi_3 \right] + \frac{\partial \chi}{\partial z} \quad (5.c)$$

ここで、 $\nabla^2 \phi_0 = 0$, $\nabla^2 \phi_1 = 0$, $\nabla^2 \phi_3 = 0$, $\nabla^2 \phi_2 = 0$, $\nabla^2 \chi = \alpha ET/(1-\nu)$ (6.a~e)

また、 G , ν 及び E は、それぞれ、せん断弾性係数、ポアソン比及び縦弾性係数を表わす。

式(4)の T を式(6.e)の右辺に代入し、熱弾性変位ポテンシャル χ を求めると、次式となる。

$$\chi = \frac{\alpha E}{4(1-\nu)} \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{f_{ts}}{\alpha_{ms}} \cos m\theta C_m(\alpha_{ms}r) \left[\frac{2 \sinh \alpha_{ms}z}{\cosh(\alpha_{ms}h/2)} + \frac{2 \cosh \alpha_{ms}z}{\sinh(\alpha_{ms}h/2)} \right] \quad (7)$$

また、 ϕ_1 は、不要となるので除外し、式(6.a), (6.c)及び式(6.d)から変位ポテンシャルを求めると、次式となる。

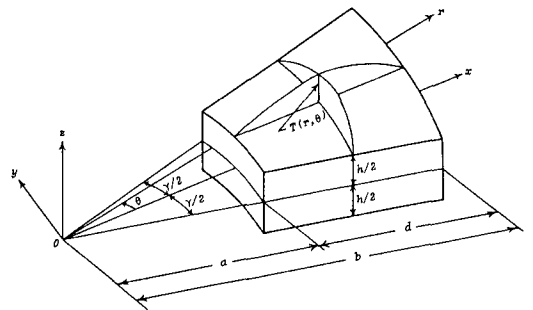


図-1 上面温度が規定された扇形厚板

$$\phi_\theta = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \cos m\theta [J_m(\alpha_{ms}r)(A_{ts}^{(1)} \cosh \alpha_{ms}z + L_{ts}^{(1)} \sinh \alpha_{ms}z) + Y_m(\alpha_{ms}r)(A_{ts}^{(2)} \cosh \alpha_{ms}z + L_{ts}^{(2)} \sinh \alpha_{ms}z)] \quad (8.a)$$

$$\phi_3 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \cos m\theta [J_m(\alpha_{ms}r)(C_{ts}^{(1)} \cosh \alpha_{ms}z + M_{ts}^{(1)} \sinh \alpha_{ms}z) + Y_m(\alpha_{ms}r)(C_{ts}^{(2)} \cosh \alpha_{ms}z + M_{ts}^{(2)} \sinh \alpha_{ms}z)] \quad (8.b)$$

$$\vartheta_z = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sin m\theta [J_m(\alpha_{ms}r)(B_{ts}^{(1)} \cosh \alpha_{ms}z + G_{ts}^{(1)} \sinh \alpha_{ms}z) + Y_m(\alpha_{ms}r)(B_{ts}^{(2)} \cosh \alpha_{ms}z + G_{ts}^{(2)} \sinh \alpha_{ms}z)] + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sin m\theta \sin \beta_n z [E_{tn}^{(1)} I_m(\beta_n r) + E_{tn}^{(2)} K_m(\beta_n r)] \quad (8.c)$$

特殊解のみでは、板の周辺の境界条件を満足できないので、同次解が必要になる。同次解として、厚板の平面応力解及び一般化平面応力解を用いるのが好都合であるが、それについては、すでに報告しているので省略する。

4.境界条件 図-1に示した扇形厚板の周辺を単純支持とし、板の上、下面を自由とすると、境界条件は、次式となる。

$$z=h/2 \text{ 及び } z=-h/2 \text{ において, } \sigma_{zr}=0, \sigma_{z\theta}=0, \sigma_{zz}=0 \quad (9)$$

$$\theta=\pm \pi/2 \text{ において, } T_{\theta\theta}=0, (u_r)_{z=0}=(\partial u_r/\partial z)_{z=0}=0;$$

$$(u_z)_{z=0}=0, M_\theta=0 \quad (10.a \sim e)$$

$$r=a \text{ 及び } r=b \text{ において, } T_{rr}=0, (u_\theta)_{z=0}=0;$$

$$(\partial u_\theta/\partial z)_{z=0}=0, (u_z)_{z=0}=0, M_r=0 \quad (11.a \sim e)$$

ここで、 $T_{\theta\theta}$ 及び M_θ などは、それぞれ、合応力及び合モーメントを表わす。

式(9)の境界条件を特殊解に課すると、特殊解に含まれる未定定数が、 $E_{tn}^{(1)}$ 及び $E_{tn}^{(2)}$ を除いてすべて定まる。境界条件(10.a~e)は、自明に満足されるので、境界条件(11.a~e)から同次解の未定定数及び特殊解の未定定数 $E_{tn}^{(1)}$ 及び $E_{tn}^{(2)}$ を求めることになる。

5.計算結果 数値計算例として、中心角 γ が $\pi/2$ 、円弧辺の外側半径 b と内側半径 a との比 b/a が6.0、直線辺長 d 及び板厚 h の扇形厚板を取り扱った。板の上面における温度 $g(r, \theta)$ は、

$$g(r, \theta) = \begin{cases} T_0[1 - (2\theta/\gamma)^2] & [2.5a < r < 4.5a] \\ 0 & \text{【上記以外の場合】} \end{cases}$$

を考えた。板厚比 $e=h/d=1/4$ の場合の計算結果の一部を図-2から図-4に示した。板の上面における応力が最大であり、 σ_{rr} は、温度の分布境界($r=2.5a$ 及び $r=4.5a$)でわずかに不連続性を示し、 $\sigma_{\theta\theta}$ は、 σ_{rr} に比較して約2倍大きく、温度の分布境界で著しい不連続性を示す。板の上面に近づくに従って変形が大きくなり、内、外円弧辺近くでは、断面の反りが著しくなる。

6.あとがき 扇形厚板の表面荷重による曲げを進展させて、温度変化による曲げを解析し、熱応力を明らかにした。本研究では、扇形厚板を対象にしたが、ここで用いた解法は、円形厚板、円環厚板或いは矩形厚板にも応用することができ、厚板の熱応力解析に対する相当有力な武器になると考える。通常用いられている厚板としての近似或いは弾性論的な近似は、何ら用いられておらず、板の周辺条件がSaint-Venantの原理或いは厚板としての幾何学的条件により近似的に満足されている点を除けば、ほぼ、3次元応力解析に匹敵する厳密な解析方法である。

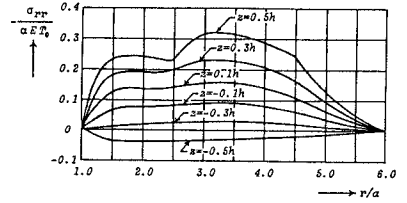


図-2 $\theta=0$ における σ_{rr} の分布 ($h/d=1/4$)

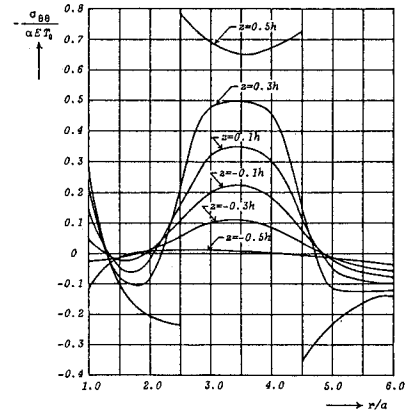


図-3 $\theta=0$ における $\sigma_{\theta\theta}$ の分布 ($h/d=1/4$)

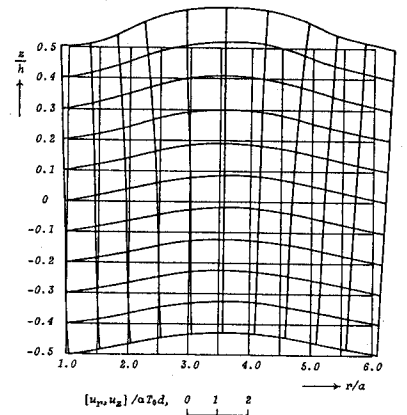


図-4 $\theta=0$ における変形の形状 ($h/d=1/4$)