

I-5

混合仮定に基づく層状性平板の静的・動的な高次近似理論

福島工業高等専門学校 正員 根岸嘉和
山梨大学工学部 正員 平島健一

① 緒言 本報告においては、混合型の Hu-Washizu の変分原理に、平板理論定式化の目的に合わせた変形を加えることにより、Reissner の新しい混合型の変分原理^{2),3)}に動的な項を付加して拡張したものに相当する原理式を得、これを用いて層状性平板の静的・動的解析理論を、各種成分の板厚方向分布の次数に制限を設けない一般化高次理論として定式化し、数値例を提示して本理論の解析精度特性について検討する。

② 理論の定式化 Fig.1 に示す層状性平板に関する動的な支配方程式ならびに境界条件式を得るため、次式のような変分原理を用いる。

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \{ T_M - \Pi_M \} dt = 0 \quad (1)$$

上式中の T_M は運動エネルギーであり次式のように各層 ($K=1, 2, \dots, N$) での値の総和で与えられる。

$$T_M = \sum_{K=1}^N \int_{V^{(K)}} \left\{ \frac{1}{2} \rho^{(K)} \dot{u}_i^{(K)} \dot{u}_i^{(K)} - \dot{p}_i^{(K)} (\dot{u}_i^{(K)} - \dot{u}_i^{(K)}) \right\} dV^{(K)} \quad (2)$$

ここに、 $\dot{u}_i^{(K)}$: 速度成分、 $\dot{u}_i^{(K)}$: 変位成分、 $\rho^{(K)}$: 質量密度、 $\dot{p}_i^{(K)}$: Lagrange の乗数、 $(\cdot) \equiv \partial(\cdot)/\partial t$ であり、ラテン添字 = x, y, z とし総和規約を適用する。

また Π_M は次式のような汎関数である。

$$\begin{aligned} \Pi_M = \sum_{K=1}^N \int_{V^{(K)}} \{ & U^{(K)}(\varepsilon_{ij}) - \bar{f}_i^{(K)} u_i^{(K)} - \sigma_{\alpha\beta}^{(K)} [z \varepsilon_{\alpha\beta}^{(K)} - (u_{\alpha,z}^{(K)} + u_{z,\alpha}^{(K)})] \\ & - \sigma_{zz}^{(K)} (\varepsilon_{zz}^{(K)} - u_{z,z}^{(K)}) \} dV^{(K)} \\ & - \sum_{K=1}^N \int_{S_\sigma} \bar{T}_i u_i^{(K)} dS - \sum_{K=1}^N \int_{S_u} \bar{r}_i (u_i^{(K)} - \bar{u}_i^{(K)}) dS \end{aligned} \quad (3)$$

ここに、 $U^{(K)}$: 歪エネルギー、 $\varepsilon_{ij}^{(K)}$: 歪テンソル、 $\bar{f}_i^{(K)}$: 物体力であり、 S_σ : 応力境界、 S_u : 変位境界、また $\sigma_{i\alpha}^{(K)}, \bar{r}_i$: Lagrange の乗数、 $(\cdot)_{,i} \equiv \partial(\cdot)/\partial i$ であり、ギリシヤ添字 = x, y とし総和規約を適用する。

式 (1) の変分原理とともに、面内歪の幾何学的関係式を付帯条件として用いる。

式 (1) の変分の結果は次式のように整理できる。

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \int \int \int \sum_{K=1}^N \int \{ & \delta u_i^{(K)} (\sigma_{ij}^{(K)} - \rho^{(K)} \dot{u}_i^{(K)}) \\ & + \delta \sigma_{\alpha\beta}^{(K)} (z \varepsilon_{\alpha\beta}^{(K)} - [u_{\alpha,z}^{(K)} + u_{z,\alpha}^{(K)}]) \\ & + \delta \sigma_{zz}^{(K)} (\varepsilon_{zz}^{(K)} - u_{z,z}^{(K)}) \} dx dy dz \\ & - \sum_{K=1}^N \int_{S_\sigma} \delta u_i^{(K)} (\bar{T}_i - \bar{f}_i^{(K)}) dS \\ & + \sum_{K=1}^N \int_{S_u} \bar{r}_i \delta u_i^{(K)} (u_i^{(K)} - \bar{u}_i^{(K)}) dS \} dt = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

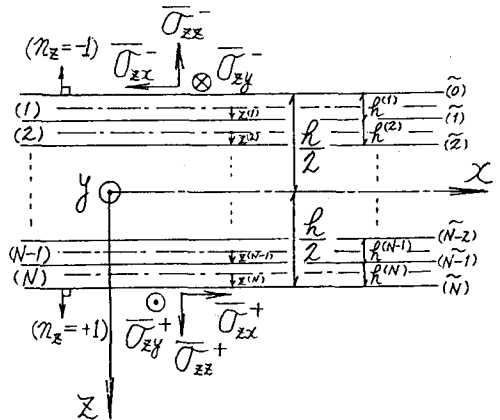


Fig.1 Geometry of laminated plate and surface tractions.

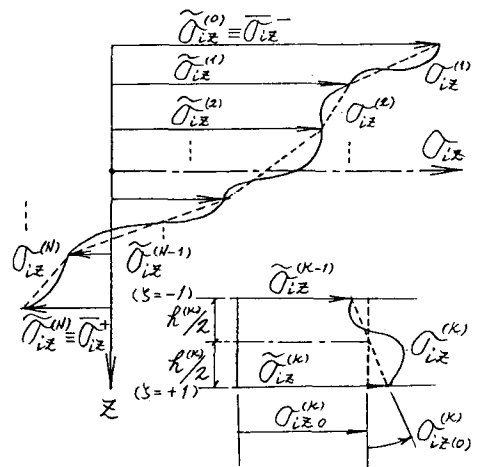


Fig.2 Schematic figure of distribution of σ_{zz} along the thickness and stress coefficients.

式(4)の体積積分中の $U_i^{(K)}$ に関する停留条件から、運動方程式が得られ、 $\sigma_{iz}^{(K)}$ の停留条件から面外歪の幾学的関係式が得られる。また S_σ 上での $U_i^{(K)}$ ならびに S_u 上での $\sigma_{ij}^{(K)}$ の停留条件より境界条件式が得られることになる。

次に、式(4)に基づいて本理論の支配式を導き出すために、まず、変位と面外応力の各成分を、基準化した局所板厚座標 ξ ($\xi = z/(h/2)$)に関する無限多項式 $R_m(\xi)$ (ここでは Legendre 多項式を一回積分したものを用いる)で次式のように展開する。

$$\left. \begin{aligned} U_i^{(K)} &= U_{i0}^{(K)} + \sum_{m=1}^M U_{i(m)}^{(K)} R_m(\xi) \\ \sigma_{iz}^{(K)} &= \sigma_{i0}^{(K)} + \sum_{m=1}^M \sigma_{i(m)}^{(K)} R_m(\xi) \end{aligned} \right\} \text{where } R_m(\xi) = \frac{1}{2^m m!} \frac{d^{m-1}}{d\xi^{m-1}} (\xi^2 - 1)^m \quad (5)$$

さらに、低次の2項を、上下表面ならびに層境界面での値で表すことにより、次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} U_i^{(K)} &= \tilde{U}_i^{(K-1)} R^-(\xi) + \tilde{U}_i^{(K+1)} R^+(\xi) + \sum_{m=1}^M U_{i(m)}^{(K)} R_m(\xi) \\ \sigma_{iz}^{(K)} &= \tilde{\sigma}_{iz}^{(K-1)} R^-(\xi) + \tilde{\sigma}_{iz}^{(K+1)} R^+(\xi) + \sum_{m=1}^M \sigma_{i(m)}^{(K)} R_m(\xi) \end{aligned} \right\} \text{where } R^-(\xi) = \frac{1}{2}(\xi - 1), R^+(\xi) = \frac{1}{2}(\xi + 1) \quad (6)$$

なお、これらの展開仮定と、各物理量の板厚方向分布の関係を示す概念図を、面外応力成分 σ_{iz} を例にとり Fig. 2 に示す。この図からも分かる通り、このような展開仮定を設定することにより、上下表面での境界条件と層接合面での連続条件を完全に満足させることが可能となる。

最後に、式(6)の展開形を式(4)の基礎式に代入して各層ごとの重み付き積分を実行し、それらの総和を、独立未知係数の変分の係数式として整理することにより本理論の支配方程式が得られる。

③ 数値計算例^{3),5)} 本理論を用いた計算例として、Fig. 3 に示すような3層の Cross-Ply 構造をもつ無限板の上面に正弦分布荷重を載荷した静的問題の解析結果のうち、面外変位 U_z と面外せん断応力 σ_{xz} の板厚方向分布を Fig. 4 (a), (b) に示す。なお図中の 1st, 2nd, 3rd は、各々本理論の1次 ($M=0$)、2次 ($M=2$) および3次 ($M=4$) の理論式による結果である。両図より高次理論の精密さが検証できる。

参考文献 1) Washizu, K. : "Variational Methods in Elasticity & Plasticity"-3rd ed., pp.411-417, 1982. 2) Reissner, E. : Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 20, pp.1366-1368, 1984. 3) Murakami, H. : J. Appl. Mech., Vol. 53, pp.661-666, 1986. 4) Hirashima, K. & Y. Negishi : Proc. JSCE, No. 350, pp.351-354, 1984. 5) Pagano, N. J. : J. Comp. Mat., Vol. 3, pp.398-411, 1969.

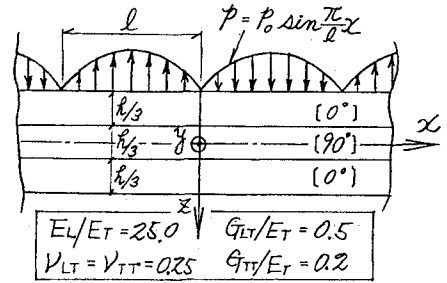


Fig. 3 Infinite cross-ply laminate subject to sinusoidal loading.

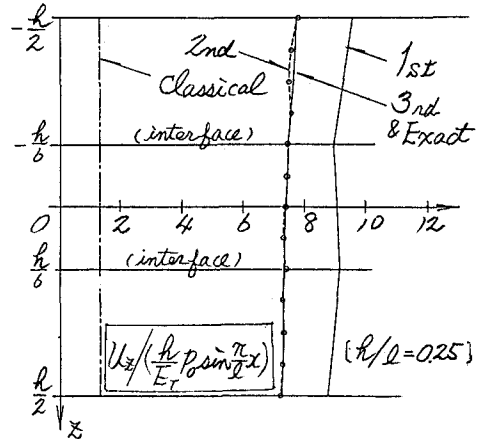


Fig. 4(a) Distributions of U_z along the thickness in the case of Fig. 3.

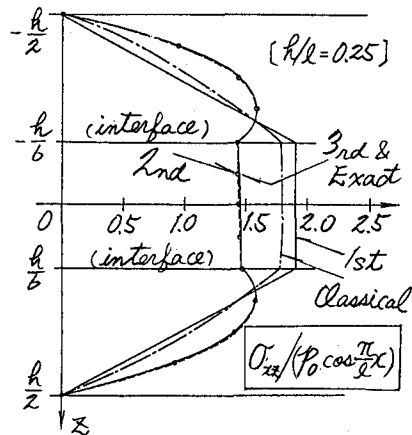


Fig. 4(b) Distributions of σ_{xz} along the thickness in the case of Fig. 3.