I-4　非局所場の弾性理論とその基本解

山梨大学工学部　正員　平島健一
山梨県庁　　　　正員　伊良原　仁

1．緒言

近年、微視構造をもつ材料の力学的挙動を連続体近似の手法を採り入れて解析しようとする一般化連続体力学の研究が盛んになってきている。この分野の研究は幾つかの方向に進展が計られてきているが、それらのひとつとして本論文で取扱う非局所性理論がある。ここで、非局所性の定義として、第1は基本的つり合い式が後述の、いわゆる非局所剰余を含んでいることで、これは物体のある点とその他の残りのすべての点との間に存在する相互作用を表すものである。第2は、構成方程式が物体の本質的な状態を決定する関数の導関数ならびに積分の両方を含んでいることである。この2つの事柄は、もちろん古典的局所理論において仮定される粒子間の相互作用としての接触力の代りに、遠隔相互作用の存在を確立した非局所連続体力学の原理の結果によるものである。

本論文は、上述の非局所性を考慮した弾性理論の概要と2次元弾性問題における幾つかの基本解を誘導・整理したものである。

2．非局所性理論におけるつり合い法則[1)]

連続体力学におけるつり合い法則は、次式のような一般形式：

$$\frac{d}{dt}\int_{V-\sigma}\phi\, dv-\int_{S-\sigma}\tau^{k} da_{k}-\int_{V-\sigma} g\, dv=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

で表される。ここに、ϕ は速度 $\underset{\sim}{u}$ で物質を掃き出す不連続面 σ を除いた体積が V である物体Bの全体にわっての時刻tでの場、g は ϕ のわき出し（source）、τ^{k} は体積Vの表面S（不連続面 σ に交差する点を除く）を通過する流束(influx)である。一般化Green-Gauss の定理によって式（1）は次のようになる。

$$\int_{V-\sigma}\left[\frac{\partial\phi}{\partial t}+(\phi v^{k})_{,k}-\tau^{k}_{,k}-g\right]dv+\int_{\sigma}\underset{\sim}{[}\phi(v^{k}-u^{k})-\tau^{k}\underset{\sim}{]}n_{k}\, da_{k}=0 \quad\cdots\cdots (2)$$

ここに、$v^{k}=\dot{x}^{k}$ は、$V-\sigma$ 内の速度場であり、括弧 $\underset{\sim}{[}\quad\underset{\sim}{]}$ は、σ を横切る際に生じる跳躍（jump）を表す。

通常の連続体力学においては、式（2）は物体のどの部分においても成立すると仮定され、式（2）の被積分関数は零と置かれる。しかしながら式（2）が成立するためには、その被積分関数は必ずしも零である必要はない。このことから、非局所連続体力学では式（2）に等価な形式として次のように書かれる。

$$\left.\begin{array}{l}\partial\phi/\partial t+(\phi v^{k})_{,k}-\tau^{k}_{,k}-g=\hat{g}\quad \text{in } V-\sigma\ ,\\ \underset{\sim}{[}\phi(v^{k}-u^{k})-\tau^{k}-\hat{G}^{k}\underset{\sim}{]}n_{k}=0\quad \text{on } \sigma\ ,\ \int_{V-\sigma}\hat{g}\, dv+\int_{\sigma}\underset{\sim}{[}\hat{G}^{k}\underset{\sim}{]}da_{k}=0\end{array}\right\}\cdots\cdots (3)$$

このように、非局所性理論には積分することによって零となるような剰余（$\hat{g}$，$\hat{G}^{k}$）が含まれる。これらの剰余は物体内のある点におけるその点以外の残りのすべての点の影響を表すものである。

3．2次元弾性問題における基本解

均質等方性の非局所性弾性体の静的問題に対する基礎式は物体力を零とすれば以下のようになる。

$$t_{kl,k}=0\ ,\quad e'_{kl}=\frac{1}{2}(u'_{k,l}+u'_{l,k}),\ u'_{k}=u_{k}(\underset{\sim}{x}')\ \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

$$t_{kl}=\int_{V}\left[2\mu'(|\underset{\sim}{x}'-\underset{\sim}{x}|)e'_{kl}(x')+\lambda'(|\underset{\sim}{x}'-\underset{\sim}{x}|)e'_{rr}(\underset{\sim}{x}')\delta_{kl}\right]dv(\underset{\sim}{x}')\ \cdots\cdots (5)$$

式（５）は、点$\underset{\sim}{x}$での応力が体積Vの物体内のすべての点$\underset{\sim}{x}'$の関数であることを示している。μ'と λ' は均質等方性の物体に対して点 $\underset{\sim}{x}$ と $\underset{\sim}{x}'$の間の距離 $|\underset{\sim}{x}'-\underset{\sim}{x}|$ の関数であり、次式で表すことができる。

$$(\mu', \lambda') = (\mu, \lambda)\cdot\alpha(|\underset{\sim}{x}'-\underset{\sim}{x}|) \cdots\cdots\cdots\cdots (6)$$

ここに、μ とλはLameの定数であり、$\alpha(|\underset{\sim}{x}'-\underset{\sim}{x}|)$ は非局所性の影響を表す関数で、たとえば次のようなものが提案されている。（ここに、a は原子間の距離に相当するものである。）

$$\alpha(|\underset{\sim}{x}'-\underset{\sim}{x}|) = \begin{cases} \alpha_0(a-|\underset{\sim}{x}'-\underset{\sim}{x}|) & \text{for } |\underset{\sim}{x}'-\underset{\sim}{x}| < a. \\ 0. & \text{for } |\underset{\sim}{x}'-\underset{\sim}{x}| \geq a. \end{cases} \cdots\cdots\cdots (7)$$

上述の式を解き、適当な境界条件を設定することにより、問題の応力場と変位場に対する解が得られる。なお、応力場については、いずれの場合も非局所性理論による解は古典理論による解と一致するので、以下、変位場についてのみ示すこととする。なお、対象とする弾性体は平面ひずみ状態にあるものとする。

４．数値計算例

表１には、無限板の１点に集中力が作用した場合（図１）の x_1方向変位 u_1、表２には、集中モーメントが作用した場合（図２）の θ 方向変位 u_θについて、それぞれ非局所性理論と古典理論を比較したものを示す。なお、表１では $x_1=20a$ で $u_1=0$ とおいた。また図３と図４に半無限板についての例を示した。

表１　集中力が作用する場合（ x_2 ＝ 0 ）

$\frac{X_1}{a}$	$\frac{2\pi\mu(1+m^*)}{Pm^*}u_1$		Influence of Nonlocality %
	Nonlocal	Local	
0.5	3.5520	3.6889	-3.7
1.0	2.9290	2.9957	-2.2
2.0	2.2834	2.3026	-0.8
3.0	1.8882	1.8971	-0.5
4.0	1.6044	1.6094	-0.3
5.0	1.3831	1.3863	-0.2

表２　集中モーメントが作用する場合（ θ ＝ ／ ）

$\frac{r}{a}$	$\frac{4\pi\mu a}{M}u_\theta$		Influence of Nonlocality %
	Nonlocal	Local	
0.0	2.5197	2.0000	26.0
1.0	1.0868	1.0000	8.7
2.0	0.5133	0.5000	2.7
3.0	0.3376	0.3333	1.3
4.0	0.2519	0.2500	0.8
5.0	0.2010	0.2000	0.5

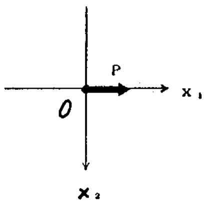

図１

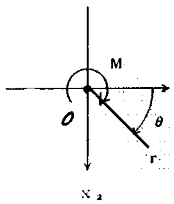

図２

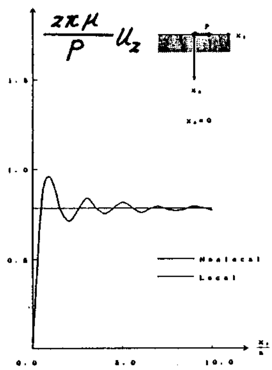

図３　集中力が作用する半無限板

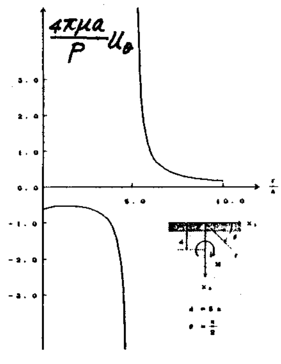

図４　集中モーメントが作用する半無限板

参考文献

1）A.C.Eringen "Nonlocal elasticity and waves",Continuum Mechanics Aspects of Geodynamics and Rock Fracture Mechanics,pp81-105(1974)

2）N.Ari and A.C.Eringen "Nonlocal stress field at Griffith crack",Cryst.Latt.Def.and Amorph. Mat.,Vol.10,pp33-38(1983)

3）J.L.Nowinski "The Kelvin plane strain problem for an infinite elastic nonlocal spece,"SM Archives,Vol.11,pp113-121(1986)