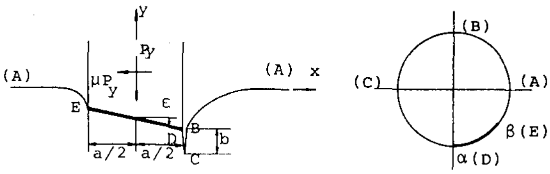
I-3　摩擦のある傾斜した剛体パンチの一端から発生したクラック

東急建設（株）　正員　奥村　幹也
名古屋工業大学　正員　長谷部　宣男
名古屋工業大学　正員　中村　卓次

【まえがき】　剛体パンチの問題は、接触問題のモデル化をした解析の一つである。本報告では、半無限弾性盤上の摩擦を有する剛体パンチが一定合力で押し込まれて傾斜しており、その一端からクラックが発生したモデルを二次元弾性平面混合境界値問題として解析する。弾性盤がパンチに接する境界を境界M、残りの境界を境界Lとする。境界L上で接線方向外力と法線方向外力、境界M上で接線方向外力と法線方向変位をそれぞれ境界条件として与え、さらに、境界M上での接線方向外力は、法線方向外力に係数一定で比例するクーロン摩擦力で与えられると考える。一般に、任意形状のこの種の境界値問題を解くのは困難であるが、境界Mが直線を形成する場合には、境界条件が比較的簡単な形で与えられ、問題が簡単になる。

【解析方法】　図１に示すｚ－平面上の半無限弾性盤に接しクーロン摩擦を有する直線状の剛体パンチの一端からクラックが発生した物理領域を、ξ－平面上の単位円内およびその周上に写像する関数を次式で表わす。



$$z = \omega(\xi) = \frac{E_0}{1-\xi} + \sum_{K=1}^{24} \frac{E_K}{\xi_K - \xi} + E_C \quad (1)$$

図１　物理領域と対応する写像面上の単位円

外力の作用しない境界がある場合、複素応力関数$\psi(\xi)$は解析接続の定理により、次式で表わされる [1]。

$$\psi(\xi) = -\bar{\phi}(1/\xi) - \bar{\omega}(1/\xi)\phi'(\xi) / \omega'(\xi) \quad (2)$$

境界Lにおける境界条件式は、(2)式の関係を用いて、境界上で$\sigma=\xi$と置いて、次式で表わされる。

$$\phi^{+}(\sigma) - \phi^{-}(\sigma) = f_L(\sigma) \quad (3)$$

$$f_L(\sigma) \equiv i\int(p_x + i\,p_y)\,ds \quad (4)$$

＋は領域内から、－は領域外からそれぞれ境界に近付いた値を表わす。境界Mにおける境界条件式は、境界M上では摩擦力以外には接線方向外力が作用しないとして、

$$\phi^{+}(\sigma) + \frac{1}{g}\phi^{-}(\sigma) = f_M(\sigma) + N(\sigma) \qquad g = \frac{\kappa+1-i\mu(\kappa-1)}{\kappa+1+i\mu(\kappa-1)} \quad (5)$$

$$f_M(\sigma) \equiv \frac{4Gi\,u_y(1-i\mu)}{\kappa+1-i\mu(\kappa-1)} \qquad N(\sigma) = \frac{(1+i\mu)(\kappa+1)}{\kappa+1-i\mu(\kappa-1)} R(\sigma) \quad (6)$$

$$R(\xi) = \phi(\xi) + \frac{1-i\mu}{1+i\mu}\overline{\phi(1/\bar{\xi})} \quad (7)$$

で表わされる。μは摩擦係数、Gは剪断弾性係数、u_y は法線方向変位、$R(\sigma)$は任意の有理関数、κはポアソン比νの関数で、平面歪では $3-4\nu$，一般化された平面応力では $(3-\nu)/(1+\nu)$ である。問題は境界L上で(3)式、境界M上で(5)式で与えられるRieman-Hilbert問題に帰着される。この問題の一般解は、

$$\phi(\xi) = H(\xi) + \chi(\xi)Q(\xi) + \frac{\chi(\xi)}{2\pi i}\int_M \frac{N(\sigma)}{\chi(\sigma)(\sigma-\xi)}\,d\sigma \quad (8)$$

で与えられる [1]。ただし、

$$\chi(\xi) = (\xi-\alpha)^m(\xi-\beta)^{1-m}, \quad m = 0.5 - i(\log g)/(2\pi) \quad (9)$$

$$H(\xi) = \frac{\chi(\xi)}{2\pi i}\int_L \frac{f_L(\sigma)}{\chi(\sigma)(\sigma-\xi)}\,d\sigma + \frac{\chi(\xi)}{2\pi i}\int_M \frac{f_M(\sigma)}{\chi(\sigma)(\sigma-\xi)}\,d\sigma \quad (10)$$

$\phi(\xi)$，$\psi(\xi)$が領域内で正則であることより、$R(\xi)$，$Q(\xi)$は次式のように決まる [2]。

$$Q(\xi) = -\sum_{k=1}^{24} \frac{\overline{A}_K B_K}{\chi(\xi_K)\,(\xi_K - \xi)} \qquad R(\xi) = -\sum_{k=1}^{24} \frac{\overline{A}_K B_K}{\xi_K - \xi} + \frac{1-i\mu}{1+i\mu} \sum_{k=1}^{24} \frac{A_K \overline{B}_K \xi_K'^2}{\xi_K' - \xi} \tag{11}$$

すなわち、$\phi(\xi)$は最終的に次式の形に得られる。

$$\phi(\xi) = H(\xi) - \frac{1-i\mu}{2} \left\{ \sum_{k=1}^{24} \left[\frac{1+i\mu}{1-i\mu} + \frac{\chi(\xi)}{\chi(\xi_K)} \right] \frac{\overline{A}_K B_K}{\xi_K - \xi} - \sum_{k=1}^{24} \left[1 - \frac{\chi(\xi)}{\chi(\xi_K')} \right] \frac{A_K \overline{B}_K \xi_K'^2}{\xi_K' - \xi} \right\} \tag{12}$$

【解析例】 パンチが合力Py で押込まれ、時計周りに角ε回転した状態を考える。この荷重条件は、

$$i\int (p_x + i p_y)\, ds = -i\mu Py + Py \quad (\text{ on EA })$$
$$= 0 \quad (\text{ on ABCD })$$
$$v = -\varepsilon x$$
$$\doteqdot -\varepsilon\,\omega(\xi) \quad (\text{ on DE })$$

で与えられる。この荷重条件に対する$H(\xi)$は、パンチを水平に保って合力Py で押込んだ解と、パンチに垂直方向の外力が作用せず、角ε回転した解の重ね合せにより得られる。この荷重項$H(\xi)$をそれぞれ$Hp(\xi)$，$Hr(\xi)$ とすれば、

$$\frac{dHp(\xi)}{d\xi} = \frac{i(1-i\mu)Py}{2\pi} \; \frac{\chi(\xi)(1-\alpha)(1-\beta)}{\chi(1)(1-\xi)(\xi-\alpha)(\xi-\beta)}$$

$$Hr(\xi) = \frac{4G\varepsilon i(1-i\mu)g}{[\chi + 1 - i\mu(\chi - 1)]\,(1+g)} \left[-\omega(\xi) + \frac{E_0\chi(\xi)}{\chi(1)(1-\xi)} + \sum_{k=1}^{24} \frac{E_K\chi(\xi)}{\chi(\xi_K)(\xi_K - \xi)} \right]$$

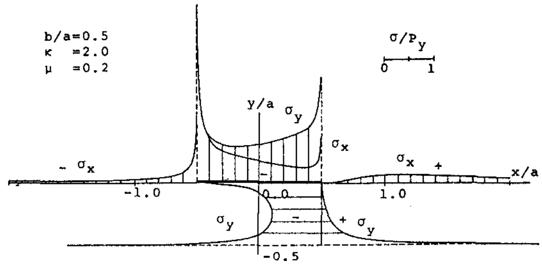


図２　応力分布例　$G\varepsilon a/Py = 0.1241$

クラック発生後の応力分布例を、$\chi=2$, $b/a = 0.5$, $\mu=0.2$ のパラメータについて示す。境界M上では、$\tau_{xy} = \mu\sigma_y$ の関係があるので、図中τ_{xy}は省略してある。

図２は合力Py の作用線が原点を通る場合で$G\varepsilon a/Py = 0.1241$である。パンチが時計周りに回転すると、パンチの端点であるＥ点でパンチが弾性盤から離れてしまう可能性がある。

図３はクラック発生前のＥ点で分離が起こらない最大の回転角の場合であり、$G\varepsilon a/Py = 0.4851$である。図４はクラック発生後にＥ点で分離が起こらない最大の回転角の場合で$G\varepsilon a/Py = 0.5789$である。これらの応力分布例においては、パンチ端Ｅ点の応力状態に著しい変化が見られる。しかし、この傾斜角の範囲では、他の部分の応力分布には大きな相違が見られない。

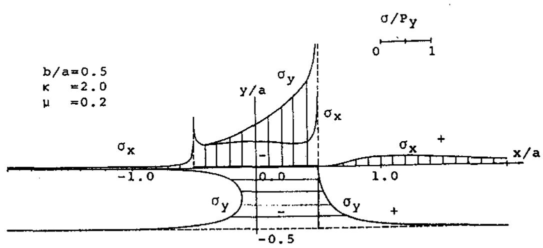


図３　応力分布例　$G\varepsilon a/Py = 0.4851$

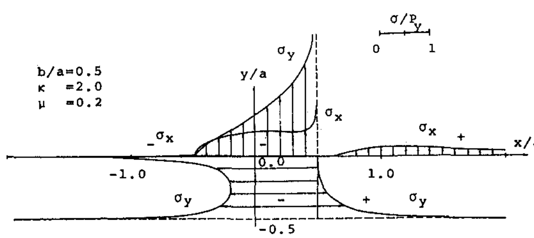


図４　応力分布例　$G\varepsilon a/Py = 0.5789$

【参考文献】 [1] Muskhelishvili,N.I.,"Some basic problems of mathematical theory of elasticity"
[2] 奥村・長谷部　第36回応用力学連合講演会講演予稿集　昭和61年12月　124D