

I-2

二か所拘束二次元弾性混合境界値問題の解

首都高速道路公団 正員 筒井 盛治
名古屋工業大学 正員 長谷部宜男
名古屋工業大学 正員 中村 卓次

1. まよがき 任意形状の半無限弾性板の境界上の二か所で変位が与えられ、他の部分で外力が与えられる二次元混合境界値問題の解を、物理領域を単位円内に等角写像する有理関数 $\omega(\xi)$ と、複素応力関数 $\varphi(\xi)$ 、 $\psi(\xi)$ を用いて求める。この解は、複素応力関数に変数 ξ の入った積分項を含む。したがってこの積分が出来ない場合、応力分布等の計算には変数 ξ ごとにこの積分項を数値積分して求めなければならない。しかし応力関数の一階微分 $\varphi'(\xi)$ 、 $\psi'(\xi)$ は積分項を含まない閉じた形で求められる。

2. 解法 任意形状の半無限領域を単位円内に写像する関数 $\omega(\xi)$ は次式の形で与えられる[1]。

$$\omega(\xi) = E_0/(1-\xi) + \sum_{k=1}^n \{E_k/(\xi_k - \xi)\} + E_{-1} \quad (1)$$

E_0, E_k, E_{-1}, ξ_k は定数であり、 $\xi=1$ は物理領域の無限遠点に相当する。境界条件は次式となる[2]。

$$\varphi(\sigma) - \delta(\sigma)\varphi(\sigma) + \omega(\sigma)\overline{\varphi'(\sigma)}/\overline{\omega'(\sigma)} + \overline{\psi(\sigma)} = f(\sigma) \quad (2)$$

$$\delta(\sigma) = \begin{cases} 0 & \text{on } L \\ \chi+1 & \text{on } M \end{cases}, \quad f(\sigma) = \begin{cases} i \int (p_x + i p_y) ds & \text{on } L \\ -2G(u + i v) & \text{on } M \end{cases}$$

ここで σ は境界上の点を表す。Mは変位境界を表し、図1の単位円に示すよ

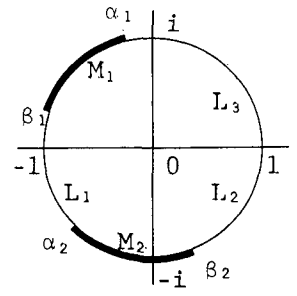


図1 単位円

うに M_1, M_2 からなりその端部を $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ とする。Lは外力境界を表し、 L_1, L_2, L_3 からなる。 χ はポアソン比を ν として平面歪状態では $3-4\nu$ 、一般化された平面応力状態では $(3-\nu)/(1+\nu)$ で与えられる。 $\int (p_x + i p_y) ds$ は境界に作用するx方向、y方向の外力 p_x, p_y を境界上のある任意点から境界に沿って積分することを示す。 G は剪断弾性定数、 u, v はx方向、y方向の与変位である。この式(2)からリーマン-ヒルベルト問題に帰着し、プレメリー関数を用いることによって $\varphi(\xi)$ は求まり次式となる。

$$\varphi(\xi) = M(\xi) - \frac{(x+1)\chi(\xi)}{2\pi i x} \int_M \frac{M(\sigma) d\sigma}{\chi(\sigma)(\sigma - \xi)} - \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{\chi(\xi) \overline{A_k B_k}}{\chi(\xi_k)(\xi_k - \xi)} \right\} + (1+x)\chi(\xi)P(\xi) \quad (3)$$

ここで $\int_M d\sigma$ はM上での積分を表す。 A_k は未定定数で $A_k = \varphi'(\xi_k')$ 、 $\xi_k' = 1/\xi_k$ であり A_k の実部、虚部に関する $2n$ 元連立方程式の解として求められる。 B_k は既知定数で $B_k = E_k/\overline{\omega'(\xi_k')}$ である。 $P(\xi)$ は単位円内で正則な任意の有理関数であり、同次方程式の解である。 $\chi(\xi), M(\xi)$ は次式で与えられる。

$$\chi(\xi) = (\xi - \alpha_1)^m (\xi - \beta_1)^{1-m} (\xi - \alpha_2)^m (\xi - \beta_2)^{1-m} \quad (4)$$

$$M(\xi) = 1/(2\pi i) \int f(\sigma)/(\sigma - \xi) d\sigma \quad (5)$$

この $\chi(\xi)$ がプレメリー関数であり、 $m = 0.5 - i\gamma$ 、 $\gamma = \ln(x)/(2\pi)$ である。分岐は $\lim_{\xi \rightarrow \infty} [\chi(\xi)/\xi^2] = 1$ をとる。 $\psi(\xi)$ は式(2)の共役式から同様にしても得られるが、ここではL上に自由境界がある場合に解析接続により求められる式を下に記す。

$$\psi(\xi) = -\overline{\varphi(1/\xi)} - \overline{\omega(1/\xi)} \varphi'(\xi)/\overline{\omega'(\xi)} \quad (6)$$

今例として簡単のため M_1, M_2 の変位成分を零とした二か所固定の場合を考え、その固定部分の各合力とその間の相対変位のみを考慮する。この時、式(2)の $f(\sigma)$ は、x, y方向の各合力を図2に示すように P_1, Q_1, P_2, Q_2 で与え、 M_2 の M_1 に対するx, y方向の相対変位をU, Vで与えれば、次式のように与えられる。

$$f(\sigma) = \begin{cases} C_1 \equiv Q_1 - i P_1 & \text{on } L_1 \\ C_1 + C_2 \equiv C_1 + Q_2 - i P_2 & \text{on } L_2 \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} 0 & \text{on } L_3, M_1 \\ D & \equiv -2G(U+iV) & \text{on } M_2 \end{cases}$$

式(3)よりこの時の $\varphi(\xi)$ は次式となる。

$$\begin{aligned} \varphi(\xi) = & \frac{C_1 \chi(\xi)}{2\pi i} \int_{\beta_1}^{\alpha_2} \frac{d\sigma}{\chi(\sigma)(\sigma-\xi)} - \frac{D \chi(\xi)}{2\pi i \chi} \int_{\alpha_2}^{\beta_2} \frac{d\sigma}{\chi(\sigma)(\sigma-\xi)} \\ & + \frac{(C_1+C_2)\chi(\xi)}{2\pi i} \int_{\beta_2}^1 \frac{d\sigma}{\chi(\sigma)(\sigma-\xi)} - \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{\chi(\xi) \overline{A_k} B_k}{\chi(\xi_k)(\xi_k-\xi)} \right\} + (1+\chi)\chi(\xi)P(\xi) \quad (8) \end{aligned}$$

上式中の $\chi(\xi) \int_{\beta_1}^1 \frac{1}{\chi(\sigma)(\sigma-\xi)} d\sigma$ の形の積分項の一次導関数は次式のようにになる。

$$\begin{aligned} [\chi(\xi) \int_{\beta_1}^1 \frac{1}{\chi(\sigma)(\sigma-\xi)} d\sigma]' &= -y(\xi) \{1/\{y(b)(b-\xi)\} - 1/\{y(a)(a-\xi)\} + g(\xi)\} \\ g(\xi) &= h(0) \{ (1-m)(\xi-\alpha_1)(\xi-\alpha_2) + m(\xi-\beta_1)(\xi-\beta_2) - m\alpha_1\alpha_2 - (1-m)\beta_1\beta_2 \} \\ &\quad + h(1) \{ m(\alpha_1+\alpha_2) + (1-m)(\beta_1+\beta_2) \} - h(2) \\ h(j) &= \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \sigma^j / \chi(\sigma) d\sigma, \quad y(\xi) = \chi(\xi) / \{ (\xi-\alpha_1)(\xi-\beta_1)(\xi-\alpha_2)(\xi-\beta_2) \} \end{aligned} \quad (9)$$

さらに楕円積分に類似した $h(j)$ の積分は、数値積分によるしかない。この積分を容易にするために一次変換を用いて実軸上の積分にできる。この式(9)と式(8)より $\varphi'(\xi)$ が閉じた形で求まる。 $\psi'(\xi)$ は $\varphi'(\xi)$ を用いて式(6)より求まる。この $\psi'(\xi)$ が単位円内で正則でなければならないことから $P(\xi)=0$ と C_1, C_2, D の関係式が一つ求まる。

3. 解析例 上記の解法を用いて、図3に示すような半楕円剛体介在物の底に剥離を有する半無限板の応力解析を行った。一ヶ所固定の半楕円剛体介在物の解析は文献[3]に報告した。荷重は無遠方で x 軸方向一様引張荷重 P を与える。この場合、式(7)の C_1, C_2, D を用いると $C_1+C_2=0, D=0$ であり、 $\varphi'(\xi)$ は次式のようにになる。

$$\begin{aligned} \varphi'(\xi) = & P E_0 z(1, \xi) / 4 - \sum_{k=1}^n (\overline{A_{1k}} B_k + P E_k / 4) z(\xi_k, \xi) + C_1 / (2\pi i) \{ h(0) \{ m\alpha_1\alpha_2 \\ & + (1-m)\beta_1\beta_2 \} - h(1) \{ m(\alpha_1+\alpha_2) + (1-m)(\beta_1+\beta_2) \} + h(2) \} \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} z(\xi, \xi) = & \frac{y(\xi)}{y(\xi)} \left\{ \frac{1}{(\xi-\xi)^2} - \frac{1}{\xi-\xi} \left(\frac{1-m}{\xi-\alpha_1} + \frac{m}{\xi-\beta_1} + \frac{1-m}{\xi-\alpha_2} + \frac{m}{\xi-\beta_2} \right) \right. \\ & \left. + \frac{1-m}{(\xi-\alpha_1)(\xi-\alpha_2)} + \frac{m}{(\xi-\beta_1)(\xi-\beta_2)} \right\} \end{aligned}$$

ここで A_{1k} は未定数で $A_{1k} = \varphi'(\xi_k') - P \omega'(\xi_k') / 4$ ($k=1, \dots, n$)である。 C_1 は次式で表される。

$$C_1 = 2\pi i / h(0) \{ -P E_0 / \{ 4\chi(1) \} + \sum (\overline{A_{1k}} B_k + P E_k / 4) / \chi(\xi_k) \} \quad (11)$$

図4に応力分布の例として $\chi=2$ 、楕円主軸長さの比 $b/a=0.5$ 、剥離が半分の深さまで生じている場合を示す。

参考文献 [1] Hasebe et al., Ing. Arch. 49(1980) [2] Hasebe, Ing. Arch. 48(1979) [3] Hasebe et al., J. Appl. Mech. (accept)

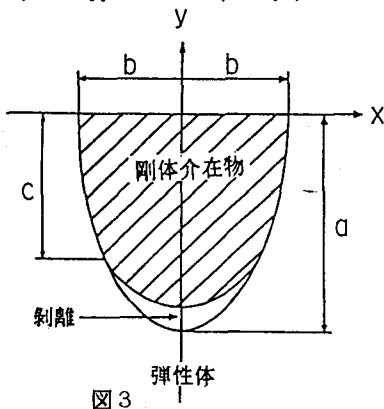


図3

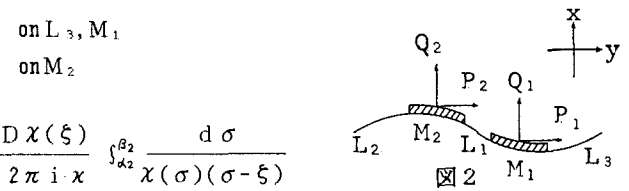


図2

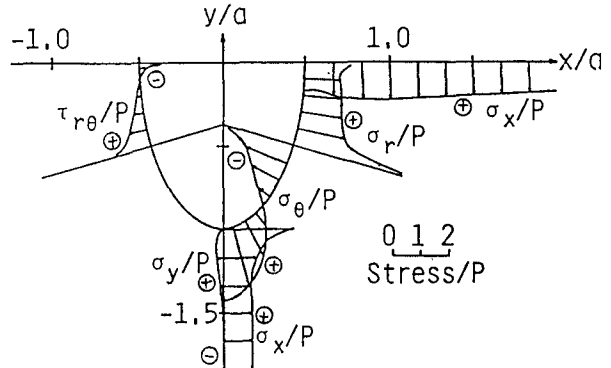


図4 応力分布 ($\chi=2, b/a=0.5, c/a=0.5$)