

I-1

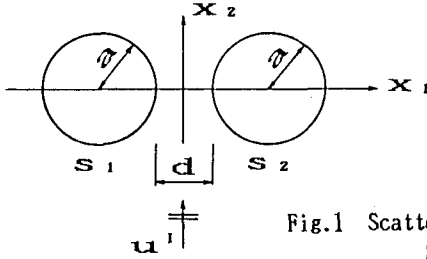
面外多重散乱問題におけるBorn級数の収束性について

東海大学海洋学部 学生員 樋江井 夕紀夫
東海大学海洋学部 正員 北原 道弘

1. はじめに

2次元無限弾性体内に複数個の空洞(欠陥)が存在する場合を考える。本研究では、入射波を平面波と仮定し、複数個の空洞による面外多重散乱問題の解析を行う。解析には境界積分方程式法を用いる。ここでは、その解法としてBorn級数による解法を提案し、Born級数解の収束性の検討を通してその有用性を確かめる。簡単のため、ここでは2個の空洞問題を設定するが、空洞の数が増加しても解法の要点は同じである。

2. 面外多重散乱問題の定式化



いま、Fig. 1 に示すようなモデルを考える。各空洞の表面 S_1, S_2 上の境界条件は $\mu \partial u / \partial n = 0$ である。このとき、離散化した後の境界積分方程式は次のように書ける。

$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1^I \\ u_2^I \end{Bmatrix} \quad (1)$$

ここで、 u_i^I は入射波であり、 u_i は各表面上の面外変位である。また、行列 $H_{i,j}$ の下添字は j 番目の空洞表面から i 番目の空洞表面への影響を意味する。すなわち、 H_{11} と H_{22} は自己影響を表し、 H_{12} と H_{21} は相互影響を表す。

3. Born級数による解法

式(1)を次のように変形する。

$$\begin{bmatrix} H_{11} & 0 \\ 0 & H_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1^I \\ u_2^I \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -H_{12} \\ -H_{21} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (2)$$

簡単のために、式(2)を次のように書く。

$$A u = u^I + B u \quad (3)$$

ここに、 A, B などは次のようである。

$$A = \begin{bmatrix} H_{11} & 0 \\ 0 & H_{22} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & -H_{12} \\ -H_{21} & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$u = \{u_1, u_2\}^T, u^I = \{u_1^I, u_2^I\}^T$$

ここで、式(3)に A の逆行列 A^{-1} を左から作用させて次式を得る。

$$u = A^{-1} u^I + C u \quad (5)$$

ここに、 A^{-1} と C は次のようである。

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} H_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & H_{22}^{-1} \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$C = A^{-1} B = \begin{bmatrix} H_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & H_{22}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -H_{12} \\ -H_{21} & 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

式(5)における右辺第1項は既知であるので、これを解 u の第0次近似とする。このとき、式(6)よりわかるように、第0次近似は入射波だけによる空洞の自己応答を表す。以下、第1, 第2, 第3次近似は次のように空洞間の相互応答(式(5), (7)参照)を順次表す表現となる。

$$\begin{aligned} u_0 &= A^{-1} u^I \\ u_1 &= u_0 + C u_0 \\ u_2 &= u_0 + C u_1 = u_0 + C u_0 + C^2 u_0 \\ u_3 &= u_0 + C u_2 = u_0 + C u_0 + C^2 u_0 + C^3 u_0 \\ &\vdots \end{aligned} \quad (8)$$

これより、第 n 次近似は次式のように書ける。

$$u_n = u_0 + C u_{n-1} = \sum_{N=0}^n C^N u_0 \quad (9)$$

これが解 u のBorn級数的表現である。

4. 解析モデル

ここでは、Fig. 1 に示したモデルにおいて、 $d = a$ とおいた。空洞表面は1つの円につき36の直線要素で近似し、一定要素を用いて解析を行った。なお入射波は次式で示される単位振幅の平面波である。

$$u^I = e^{ikx_2} \quad (10)$$

5. 数値解析例

Fig. 2 は、1つの空洞の場合について、積分方程式法の結果を検証するために、Morse の結果〔1〕と比較したものである。Fig. 3 は2つの空洞による多重散乱問題に対する結果であり、式(9) に示したBorn級数解の収束性を、変形レベルで確認するために左側空洞 (S_1) 上の変位を描いたものである。図中の実線は、式(1) に示した積分方程式系を直接

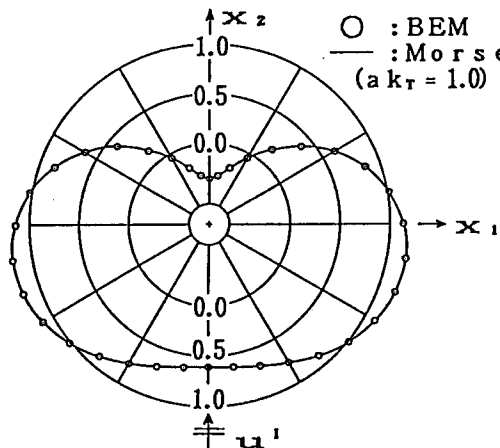


Fig.2 Real part of u for single cavity

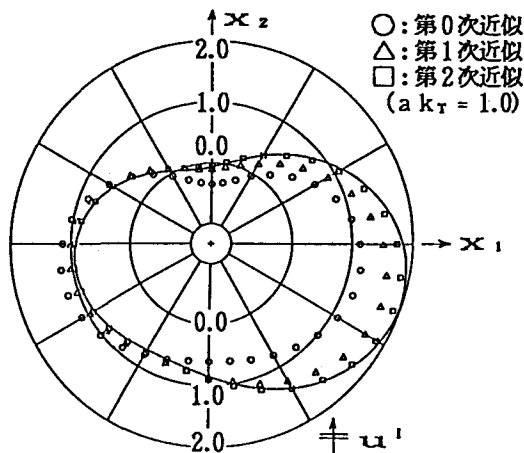


Fig.3 Real part of u for double cavities

解いた結果であり、○, △, □がBorn級数による結果である。図中には第2次近似までを示したが、第3次近似はほぼ完全に実線と一致する。

Fig. 4 は、Born級数解の収束性を、入射波の波数を変えて調べた結果である。収束性の判定については次のように考えた。まず、 E_1, E_2 を次式のように定義する。

$$E_1 = \sum_{\alpha} |u_{\alpha}| / Kf$$

$$E_2 = \sum_{\alpha} |u_{\alpha}^N| / Kf \quad (11)$$

ここに、 E_1 における u_{α} は積分方程式法による解であり、総和は要素 α (本研究では1~36) に関する和を意味する。 Kf は全自由度であり、本研究では要素数36に一致する。また、 E_2 における u_{α}^N は式(9)の各項からの寄与 $C^N u_{\alpha}$ ($N=0, 1, 2, \dots, n$) を表す。ここで、Fig. 4の横軸は式(9)における各項を示すパラメータ N であり、縦軸は解に対する級数各項の割合 E_2/E_1 を対数目盛で示している。実用上、 10^{-4} の精度は必要ないと考えられるので、式(9)は入射波の波数が大きくなっても数項で収束していることがわかる。

参考文献〔1〕Morse, P.M., Vibration and Sound, McGraw-Hill, 1948.

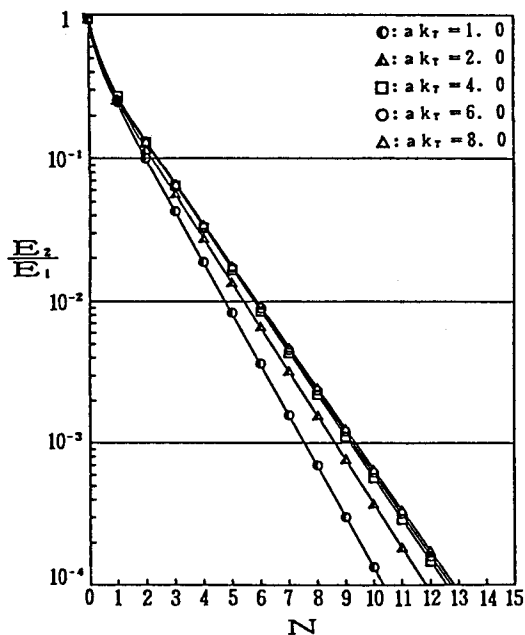


Fig.4 Convergence rate