PSⅠ-23　半無限弾性体上の回転体の波動入力問題

東京大学地震研究所　正会員　東原紘道

１．研究の概要

耐震工学上重要な地盤と構造物の動的相互作用の計算方法には、大別して、①数値解析手法によるものと、②理想化されたモデルの解析的考察によるものがある。この両者には一長一短がある。なかでも地盤の非線形的な性質は前者によってしか取り扱うことができない。しかし他方で、動的な現象あるいは無限領域での現象は、もっぱら数値解析的に解決することが原理的に不可能な内容を含んでいる。もちろん個々の問題に対して適宜に数値解法を適用することは当然であるけれども、上述の理由により、動的相互作用の理論の中核的枠組みは、やはり古典的な解析的アプローチによって構築されるべきであると考えられる。

この観点から、筆者は半無限弾性体の表面上にある円板の動的コンプライアンスの解析を進め、厳密でしかも適用性の広い理論形式を模索している。本研究は、動的コンプライアンス理論を地震応答理論へ転換するものである。以下では、半無限弾性体上にあってこれに密着した剛体円柱（正確には任意の回転体であればよい）を考え、半無限弾性体の下方から鉛直方向上向きに横波が入射する場合の円柱の応答を計算する。ただし本稿がポスターセッションであることを考慮して、以下の２と３において、半無限弾性体上の円板の動的応答に関してなされた従来の解析的研究の概要を述べる。

２．半無限弾性体上の円板の動的応答に関する解法

議論を解析的に進めるためには、問題を理想化することが必要である。すなわち弾性体は等方的で一様とする。また板と弾性体の剥離やすべりは考えないものとする。この問題に対する解析的な手法には次のようなものがある。

（１）　デュアル積分方程式法[1]

剛体板がもつ４種の振動モードは、接触応力が緩和された条件に従う限り、デュアル積分方程式によって定式化され、ある適切に導入された未知関数に対する、第２種フレドホルム型積分方程式が得られる。円板の動的コンプライアンス関数はこの未知関数の簡単な積分変換として求められる。形式的には、接触応力もこの未知関数の積分変換になっているが、これは複雑であるため、接触応力を精度よく計算することは困難である。

（２）　関数展開法[2]

変位および応力をルジャンドル多項式で展開することにより、その係数を未知数とする連立１次方程式が得られる。緩和された応力条件下の鉛直モードに限れば、剛体円板および一様な弾性円板に対する適用例がある。しかし爾余のモードへの適用の成否は明らかにされていない。

（３）　直接積分方程式法[3]

上記の二つの方法と異なり、円板の剛性条件を用いることなく、専ら半無限弾性体の振動の解析によって、接触面の変位と接触応力との関係を、第１種フレドホルム型積分方程式で定式化する。これは円板の運動方程式と独立に導出されている結果、対象となる円板の剛性条件には制限がない。さらに緩和された接触条件のみならず完全固着の接触条件に対しても厳密に定式化することが可能である。

これらの半無限弾性体の定常波動問題の解法はすべて、よく知られたH.Lambのアプローチを踏襲しており、波数領域での扱いと変数分離の方法に拠っている。その結果として、解析の途中に波数領域上の非常に複雑な積分が現れる。そしてこれを乗り越える数学的方法の差が、上記の諸方法の違いの本質をなしているのである。具体的には、積分核の部分が、（１）の方法では三角関数とベッセル関数の積に、（２）の方法では引き数が同じである二つの球ベッセル関数の積に還元されているのに対し、（３）の方法では引き数の異なる二つのベッセル関数の積であり、その実行は困難である。換言すれば、はじめの二つの方法に含まれる数学的技巧は、波数領域上の積分を単純な形に転換するためのものであることがわかる。そのためには、代償として、適用範囲を制限することが避けられないのである。この代償は小さなものではない。これに対して（３）の方法は、そのような制限をすることなく、問題の積分を正面から計算してしまうものである。その過程はやや煩雑であるが、得られる結果は簡潔であり、その適用性の広さは、計算の複雑さを補って余りあるものである。

３．これまでに解かれた問題

前述の方法によって、これまで以下の諸問題が解かれている。

（１）剛体円板の外部加振問題。緩和された接触条件下でのすべてのモードが計算されている。
（２）弾性円板の外部加振問題。緩和された接触条件下での鉛直２モードが計算されている。
（３）半無限弾性体が粘性減衰をもつ問題。（２）と同じモードが計算されている。
（４）半無限弾性体が多層を成す問題。　　（２）と同じモードが計算されている。
（５）完全固着の接触条件下での剛体円板の外部加振問題。ここでは鉛直モードと水平モードが不可避的に連成する。
（６）根入れのある問題。ねじれ（軸対称水平）モードが計算されている。

以下に述べる波動が入射する場合の円柱の応答は、緩和された接触条件下では生じる余地がなく、ここの（５）の精密な解を前提とする。ところが２で述べたように、（５）の厳密な定式化は直接積分方程式法によってのみ実現されている。そこでこれを用いることにする。

４．解　析

円柱の底面に作用する水平力を Xとし、鉛直力が水平軸のまわりに生じる回転モーメントを Mとすると、次の運動方程式が得られる。

$$m\ddot{x}=X,\qquad I\ddot{a}=M-hX \tag{1}$$

ここにxとaは水平変位と回転変位であり、mとIは質量と慣性モーメント、h は重心の高さである。

他方で、直接積分方程式法によって、次のような（複素）剛性マトリクスが得られる[4]。

$$\frac{1}{GR}\begin{Bmatrix} X \\ A/R \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} k(1,1) & k(1,2) \\ k(2,1) & k(2,2) \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x \\ Ra \end{Bmatrix} \tag{2}$$

ここにRは底面の半径、 Gは弾性体のせん断剛性である。

これらを連立することにより、次の様な結果が得られる。ただし、V は弾性体の横波の速さである。

$$x = F(f;M,I,R,h,m,V)\ (2A) \tag{3}$$

$$a = H(f;M,I,R,h,m,V)\ (2A) \tag{4}$$

ここに fは周波数であり、(2A)は円柱がない場合の自由表面の水平変位である。

したがって Fと Hは、円柱の存在がひき起こす、振動の動的増幅率である。これらは振動数、円柱の質量および形状、半無限弾性体の質量および弾性率に依存する。このため剛体の回転体という極めて単純な構造物であっても、これらのパラメータの組み合わせに応じて、多様なふるまいをすることが理解される。

５．　参考文献

[1] Luco,J.E. and Westmann,R.A.：Dynamic response of circular footings, ASCE Vol.97, No.EM5 pp.1381-1395, 1971
[2] Krenk,S. and Schmidt,H.：Vibration of an elastic circular plate on an elastic half space － A direct approach, ASME Journal of Applied Mechanics Vol.48, pp.161-168, 1981
[3] Higashihara,H.：Explicit Green's function approach to forced vertical vibrations of circular disk on semi-infinite elastic space, ASCE Vol.110, No.EM10, pp.1510-1523, 1984
[4] 東原紘道：半無限弾性体上の円板の水平、ロッキング連成振動、土木学会論文集　第 386号／I-8, 293-300頁、1987年10月.