PS I－21　粘弾性地盤に対する無反射境界の試み

東京都葛飾区役所　正員　吉田　真
日本大学理工学部　正員　色部　誠

１）まえがき　地盤特性のモデル化、地盤と構造物の相互作用のモデル化および半無限地盤のモデル化は耐震工学における３大重要課題であろう。このうち前二者が材料構成則に関連する力学的な問題であるのに対し、半無限地盤のモデル化はむしろ数理的な問題といえる。半無限地盤の処理法についてのこれまでの提案の多くが吸収境界または透過境界の概念に基ずく無反射境界によるものであるが、最近、塩尻・田口　は半無限領域を有限領域に写像する解法を提案している。これは地盤・構造系における半無限地盤の処理法としては、窮極に近いもののように思われる。

ここでは、波動方程式の解である変位関数の形式から、変位勾配は変位速度と位相速度の比に等しいことに基ずき、半無限領域における波動伝播問題を有限領域に対する第二種境界値問題として扱つている。以下に一次元問題の結果のみを報告する。

２）一次元問題における無反射境界モデル　波は仮想境界と表面に囲まれた領域内側より外にむかつて進行するものとする。よつて、入力域が地表面に一致する場合、進行波のみを考えればよい。本報告では、このような問題に限ることにする。鉛直軸をｚ軸にとり、鉛直下向きを正の方向とする。

変位をu、応力をσ、密度をρとする。弾性体に対する支配方程式

つり合い式　$\rho\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{\partial \sigma}{\partial z}$　　変位ひずみ式　$\dfrac{\partial u}{\partial z}=\varepsilon$　　応力ひずみ式　$\sigma=E\varepsilon$　　(1)

を、境界条件

$$z=0 \text{ で} \quad \sigma(z,t)=\begin{cases}-p\sin\left(\dfrac{2\pi}{T}t\right) & 0<t<T\\ 0 & t<0,\quad T<t\end{cases} \quad (2) \qquad z\to\infty \text{ で} \quad u(z\,t)\to 0 \quad (3)$$

に対して解けば、

$$u(z,t)=\frac{pT}{2\pi\sqrt{\rho E}}\left[H(t-\frac{z}{c})-H(t-T-\frac{z}{c})\right]\left[1-\cos\frac{2\pi}{T}(t-\frac{z}{c})\right] \quad (4)$$

$$\sigma(z,t)=-p\left[H(t-\frac{z}{c})-H(t-T-\frac{z}{c})\right]\sin\frac{2\pi}{T}(t-\frac{z}{c})$$

を得る。この問題で半無限領域を有限領域 $0\leqq z\leqq Z$ に変え、これを表面境界条件式（2）と、進行波にたいする変位関数 $u(z,t)=F(ct-z)$ から得られる関係

$$z=Z \text{ で} \quad \frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{1}{c}\frac{\partial u}{\partial t} \quad (5)$$

の条件の下で差分法によつて解き、Fig.1 を得た。ここで c は弾性波速度である。図によれば、内部境界 $z=Z$ で、反射は全く見られない。0.5Z より深い所で、応力変動の端部に計算誤差による若干の乱れを生じているが、数値解は理論解に完全に近い程に一致している。

３）粘弾性地盤への無反射境界モデルの適用　以上は非定常問題であつたが、ここでは定常問題について考える。この場合、変位・応力・ひずみは $\overline{u}(z)\exp(i\omega t)$, $\overline{\sigma}(z)\exp(i\omega t)$、$\overline{\varepsilon}(z)\exp(i\omega t)$ の実部または虚部によつて得られる。$\overline{u}(z)$, $\overline{\sigma}(z)$, $\overline{\varepsilon}(z)$は複素振幅である。また、応力ひずみ関係式はつぎのように与えられる。

$$\overline{\sigma}(z)=\overline{E}\cdot\overline{\varepsilon}(z) \quad (6)$$

$\overline{E}$は複素弾性率であつて、振動数ωに依存する。式(1)にこれらの関係を用いれば、つり合い式はつぎのようになる。

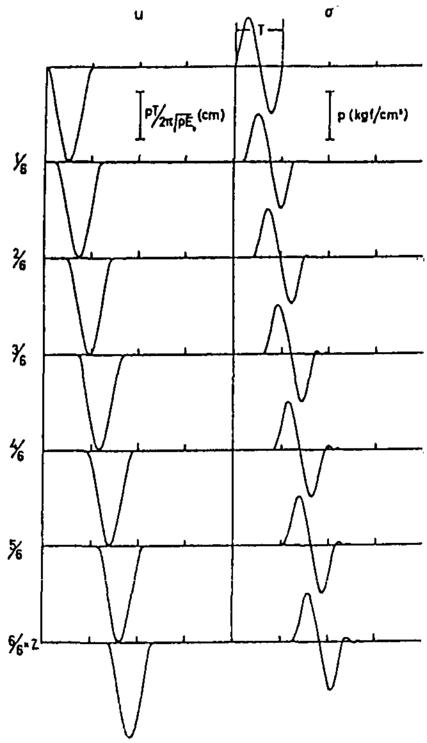


Fig.1

$$-\omega^2\rho\bar{u}=\bar{E}\frac{d^2\bar{u}}{dz^2} \qquad (1)'$$

変位関数を u(z,t)= F(t-fz) とおけば、式(5)に代わつて下式を得る。fは複素数である。

$$\frac{d\bar{u}}{dz}=-i\omega f\bar{u} \qquad (5)'$$

式(5)'を式(1)'にもちいれば、fとEの関係が導かれ f が定まる。さて、z=0 で正弦的に変動する定常外力 p sinωt が作用するものとする。このとき境界条件式はつぎのように与えられる。

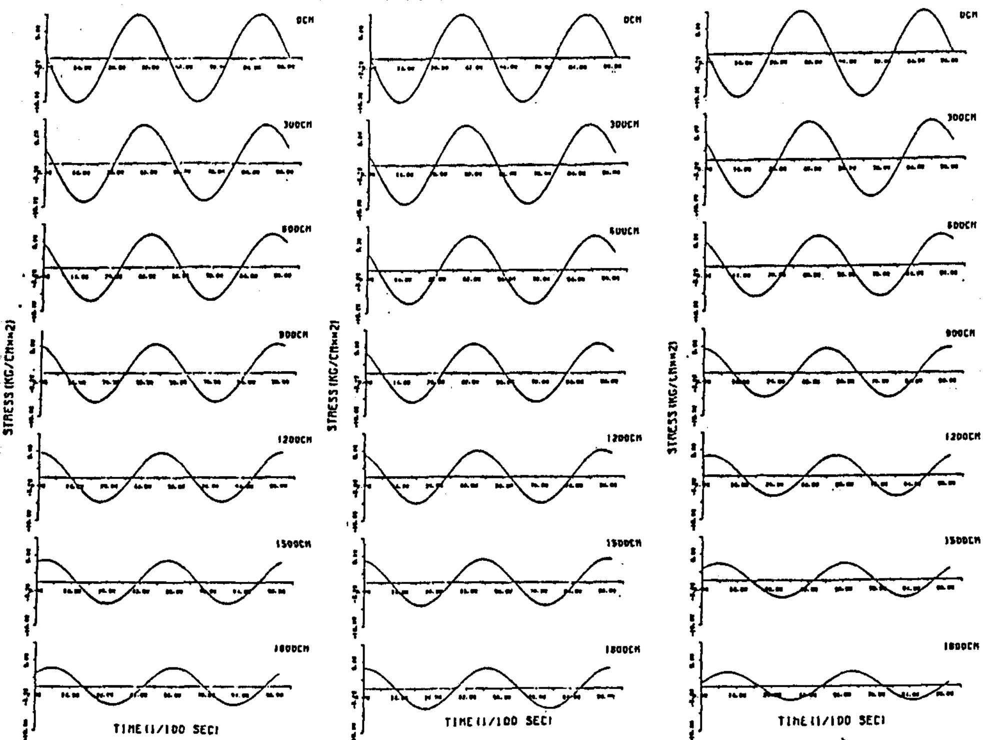
$$\bar{\sigma}=\bar{E}\frac{d\bar{u}}{dz}=-p \qquad (2)'$$

境界条件(2)'、(5)'のもとで得られる、式(1)'の解 $\bar{u}(z)$を $\bar{E}\frac{\partial\bar{u}}{\partial z}$ に用いて応力振幅 $\bar{\sigma}(z)$を求め、それらに exp(iωt)を作用させれば、所要の解をうる。 以上によつて、半無限の粘弾性地盤が表面で定常正弦的に加振される問題を有限領域の問題として処理してみた。 Fig.2 a),b),c)はMaxwell,Voigt,Burgers 材料からなる地盤への適用結果である。計算は差分法によつた。いずれの場合も入力の周期を 2Hz、領域の深度を z=18.m とした。バネの弾性定数はすべて 200.kgf/cm²、ダッシュポットの粘性定数は 20.kgf·sec/cm² とした。図によれば、内部境界での反射は皆無であり、算定される応力波の伝播速度および減衰性状は理論解と完全に近い一致を示した。

つぎの表は z=18.m における数値解から求めた応力波伝播速度および減衰係数と理論値との比較を示す。

	伝播速度 (m/s)		減衰係数 (1/m)	
材料	計算値	理論値	計算値	理論値
Maxwell	93.3	93.7	-0.0469	-0.0469
Voigt	141.7	140.7	-0.0431	-0.0431
Burgers	76.6	78.1	-0.0632	-0.0630

4）むすび　　変位勾配が変位速度に比例することに着目して得られる、透過境界の概念に属する無反射境界を作り、半無限弾性地盤および同粘弾性地盤にこれを適用して良好な結果を得た。



a)　b)　c)

Fig.2

参考文献　塩尻弘雄、田口友康：重力式ダムの地震応答解析法の開発 ― 半無限地盤-構造物-水系の非線形動的応答解析の一方法 ― 、電力中央研究所　研究報告・385012　昭和６０年１０月。