Ⅳ-241　住宅市街地におけるビルトアップ速度式の数学モデルについて（２）

近畿大学　正員　保野健治郎　　同　正員　難波義郎
○同　正員　大森豊裕

■ はじめに

本研究は、住宅市街地を形成していく過程を示すための最も適したビルトアップ速度式を得ようとする一連のものである。そしてこれまでに、市街化の過程を建築戸数の推移で表した結果、ビルトアップ速度式の型は式（１）に示す指数曲線式Ⅱが適していることを示した。[1] さらに建築戸数のようなディジタル量（離散量）をデータとする場合の係数の求め方は、従来の最小二乗法では不適当であり、ディジタルデータとして解くべきことを指摘した。[2]

y：建築戸数　x：経過月数

$$y = G / \left[1 + e^{-L\{1 - e^{-r(x-d)}\}}\right] \cdots\cdots (1)$$ G、L、r、d：係数

そこで本報告は、地方都市の住宅団地７地区のデータを用い従来の最小二乗法による解法とディジタルデータとする解法の検討を具体的に行った結果を報告するものである。

■ ディジタルデータをアナログデータとして解く場合の問題

yをアナログ量（連続量）と考える従来の最小二乗法の考え方は、データは正規分布すると考えるので、

$$P(y_i \cdots y_n) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_i} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_i^{\,2}}(y_i - f(x_i))\right\} \cdots\cdots\cdots (2)$$

を最大にするような関数 f(x) を求めることである。このための必要条件は、式（２）の両辺の対数をとって関数 f(x) の係数　b_j ($j=1\cdots\cdot m$) で微分して０とおくことである。すなわち

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{y_i - f(x_i)}{\sigma_i^{\,2}} \frac{\partial f(x_i)}{\partial b_j} = 0 \quad (j=1,\cdots\cdot m) \cdots\cdots (3)$$

一方、yをディジタル量と考える方法は、データはポアソン分布と考えて

$$P(y_i \cdots y_n) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\{f(x_i)\}^{y_i}}{y_i\,!} \exp\{-f(x_i)\} \cdots\cdots\cdots (4)$$

を最大にする f(x) を求めることである。このための必要条件は、アナログ量とする場合と同様に

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{y_i - f(x_i)}{f(x_i)} \frac{\partial f(x_i)}{\partial b_j} = 0 \quad (j=1,\cdots\cdot m) \cdots\cdots (5)$$

である。　いま、 $f(x_i) = a g(x_i)$ とすると、式（５）に代入して、

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{y_i - a g(x_i)}{a g(x_i)} g(x_i) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} \{y_i - f(x_i)\} = 0 \qquad \therefore \sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdots\cdot (6)$$

となる。　すなわち、yの推定値の総和はデータの総和に等しいということであって、この関係は回帰式の適合性を判断する１つの条件と考えられる。

ところが、y_i がディジタルデータのとき最小二乗法を適用するには、従来の考え方によれば、y_i の標準偏差を$\sqrt{y_i}$と考えて、式（３）は

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{y_i - f(x_i)}{y_i} \frac{\partial f(x_i)}{\partial b_j} = 0 \quad (j=1,\cdots\cdot m) \cdots\cdots (7)$$

とすればよいとされてきた。そこで、　$f(x_i) = a g(x_i)$　を代入すると、

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{y_i - a g(x_i)}{y_i} g(x_i) = 0 \quad \cdots\cdot\cdot \ (8)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{y_i{}^2-y_i\ f\ (x_i\ )}{y_i}-\frac{y_i{}^2-2y_i\ f\ (x_i\ )+\{f\ (x_i\ )\}^2}{y_i}\right]=0$$

$$\sum_{i=1}^{n}\{y_i-f\ (x_i\ )\}-\chi^2=0\ \cdots\cdots\ (9)$$

になって、式（6）に示した関係は満足されていないことがわかる。そして χ^2 は常に正であるから関数の下の面積はデータの和に比べ χ^2 だけ小さくなる。そのためビルトアップ速度式を考える時 y_i をアナログデータとする今までの最小二乗法で解くと、実際のデータに比べ低い値をとることになる。

■　アナログデータとする解法とディジタルデータとする解法の差異

ディジタルデータであるｙ（本研究では建築戸数）を従来の最小二乗法であるアナログデータとする方法で解く場合とディジタルデータとする場合では、理論的には前記のように前者が後者に比べ低い値となる。このことを本研究のデータを用いて検討を行う。まず実測値の総和を算出し、前報[2)]で述べたディジタルデータとする解法および最小二乗法で得られた係数をもとにそれぞれの総和を求めた。これを整理するとTable１に示す通りである。このように推定値の総和は、いずれの場合もアナログデータとする方法はディジタルデータとする方法に比べ小である。そして、政畝の個人宅地及び東明ハイツの全宅地の２例を除くといずれの地区もアナログデータとする方法は実測値の総和より低い値である。

さらに、実測値の総和とそれぞれの推定値の総和の差を実測値の総和に対する割合（Table１の（　）内の値）でみると、政畝の個人宅地と東明ハイツの個人宅地、全宅地の３例以外のすべての地区でディジタルデータとする方法が実測値の総和にかなりよく近似していることがわかる。

Table１　実測値の総和と２種の方法による推定値の総和の比較

項目／地区名	個人宅地（建売住宅を除くデータ）					全宅地（建売住宅を含むデータ）				
	A1	B1	C1	B1 －A1	C1 －A1	A2	B2	C2	B2 －A2	C2 －A2
政　畝	15287	15354	15612	67(0.44)	325(2.13)	16815	16728	16840	-87(0.52)	25(0.15)
ひばりヶ丘	25257	24886	25306	-371(1.47)	49(0.19)	34766	34509	34919	-257(0.74)	153(0.44)
泉ヶ丘	19097	18469	19092	-628(3.29)	-5(0.03)	33225	32460	33337	-765(2.30)	112(0.34)
東明ハイツ	11275	11273	11393	-2(0.02)	118(1.05)	23289	23435	23464	164(0.63)	175(0.75)
本庄ハイツ	27927	27418	28042	-509(1.82)	115(0.41)	33852	33033	33879	-819(2.42)	27(0.08)
宮ヶ迫	45226	45062	45252	-164(0.36)	26(0.06)	46552	46424	46676	-128(0.27)	124(0.27)
松ヶ丘	31258	30810	31476	-448(1.43)	218(0.70)	38293	37510	38527	-783(2.02)	234(0.61)

（注）A1、A2 ：実測値の総和　　B1、B2 ：アナログデータとする解法（最小二乗和）からの総和
（　）内はA1、A2 に対する％　　C1、C2 ：デイジタルデータとする解法からの総和

■　まとめ

以上のように、ディジタルデータを従来の最小二乗法で解いた場合の推定値の総和は、実際のデータの総和に比べ低い値をとることが認められた。このような推定値をもとに、地区の住環境整備等各種の事業を行うと整備需要に対し後追い的なものになり、さらには市街化の遅れる要因となることも考えられる。そのため市街化を予測するモデル式の係数決定の方法としては不適当であることがわかった。しかし、このディジタルデータとする解法によると、理論的には実測値の総和と推計値の総和は等しくなると考えられるが、ここでは完全にはこの関係は満足していない。ただその差異は、実測値の総和に対し前記の３例を除くとそれぞれ0.75％以下であることから考えると誤差の範囲ともいえるが、これについては今後検討を加える必要があると考えている。

＜文献＞1)大森他「住宅市街地におけるビルトアップ速度式に関する基礎的研究(1)」60年土木学会大会
2)大森他「住宅市街地におけるビルトアップ速度式の数学モデルについて」60年建築学会大会