Ⅳ－188　確率制御理論を用いた線形な最適公共システムの解法と評価について

信州大学　正員　奥谷　巖
長野工業高等専門学校　正員○柳沢吉保

1 まえがき

経済計画用の計量モデルに制御理論を用いることによって最適な政策手段を求めることは可能である。しかし社会・経済問題の将来展望を行う場合、それが長期にわたる程、大きな不確定要素が入ってくる。そこで確率制御理論を用いた経済政策が必要となるが、従来の理論では変数に期待値をとっているため、実際に不確定要素が入ってきた場合の経済政策の効果を計測するにはシミュレーションを行う必要がある。

そこで本研究ではD·Pを導入した従来の確率制御以外の方法により得られる経済政策を用いたシミュレーションを行うことにより、経済システムにおける確率制御について検討・評価を行う。

2．経済システムモデル

本研究では、経済効果の分析に有効であり、現在中期経済計画において大きな役割を果たしている計量経済モデルを導入している。ここでは線形の経済モデルを導入しており、このモデルを次のようなシステム方程式に変換する。

$$x_t = \Psi x_{t-1} + \Gamma u_{t-1} + b + \xi_{t-1} \qquad (1)$$

ここで x_tは内生変数を含む状態量、u_tは公共投資量を示す政策変数、Ψ、Γ、bは最小二乗法、最尤推定法等により決定される係数、或は定数項である。

ξ_tは不確定要素を含む攪乱項であり、その性質は

$$E(\xi_t) = 0$$
$$E(\xi_t \xi_t^T) = \Sigma_\xi \quad \text{（既知）} \qquad (2)$$
$$E(\xi_t \xi_{t'}^T) = 0 \quad (t \neq t', \text{各期独立})$$

と仮定する。

確率制御の場合、目的関数については次のように状態量の線形の式に期待値をとったものとし

$$J = \sum_{t=1}^{N} E(a_t x_t) \qquad (3)$$

（3）式を（4）式のような制約条件の下で最大にするような政策変数を求める。

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} u_j^i(t) \leqq \alpha(t)\, x^l(t) \qquad (4)$$

$$\bar{u}_j^i(t) \leqq u_j^i(t) \leqq \bar{\bar{u}}_j^i(t) \qquad (5)$$

$\bar{u}_j^i(t)$ は下限値、$\bar{\bar{u}}_j^i(t)$ は上限値

ここで、iは公共投資、jはゾーン、α（t）はt期におけるある内生変数$x^l(t)$（例：歳入量）に対して全公共投資量が占める割合である。

3．経済政策

ここでは将来の経済変動の比較を行うために、3つの経済政策決定手法を示す。

Ⅰ）　従来の確率制御を用いた場合

（3）、（4）、（5）式により表される最適公共投資問題は、それぞれの公共投資が全公共投資量において占める割合をζとおくと、一般的な第k期において次のように置き直すことができる。

目的関数　$\tilde{a}_k \Gamma \zeta_{k-1} \rightarrow \mathrm{MAX} \qquad (6)$

制約条件　$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \zeta_j^i(k-1) \leqq 1 \qquad (7)$

$$\bar{\zeta}_j^i(k-1) \leqq \zeta_j^i(k-1) \leqq \bar{\bar{\zeta}}_j^i(k-1) \qquad (8)$$

$$\tilde{a}_k = a_k + \tilde{a}_{k+1}\Psi + \tilde{a}_{k+1}\Gamma \zeta_k^* F_k \qquad (9)$$

$$u_{k-1} = \alpha(k-1)\, x^l(k-1) \quad \zeta_{k-1} = F_{k-1} x_k \zeta_{k-1}$$

Ⅱ）　各期間毎に最適解を求める場当り的制御を用いた場合

ここではD·Pを用いずに各期毎に目的関数を最大にする政策変数を求める。よって一般的第k期の最適公共投資問題はつぎのようになる。

目的関数　$a_k \Gamma \zeta_{k-1} \rightarrow \mathrm{MAX} \qquad (10)$

制約条件　$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \zeta_j^i(k-1) \leqq 1 \qquad (11)$

$$\bar{\zeta}_j^i(k-1) \leqq \zeta_j^i(k-1) \leqq \bar{\bar{\zeta}}_j^i(k-1) \qquad (12)$$

$$u_{k-1} = \alpha(k-1)\, x^l(k-1) \quad \zeta_{k-1} = F_{k-1} x_k \zeta_{k-1}$$

Ⅲ）　各期毎に乱数による投資割合の決定を行った場合

投資割合ζについて

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \zeta_j^i(k-1) = 1 \quad (k = 0 \sim N) \qquad (13)$$

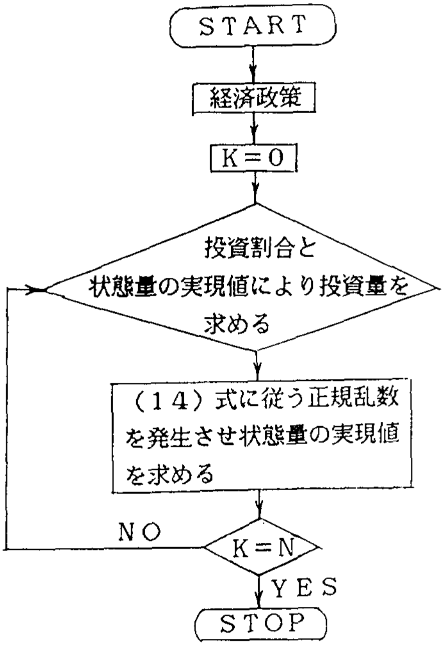
を満たす$\zeta_j^i(k-1)$を一様乱数を発生させ求める。

$$u_{k-1} = \alpha(k-1)\, x^l(k-1) \quad \zeta_{k-1} = F_{k-1} x_k \zeta_{k-1}$$

4．経済変動予測シミュレーション

政策者の意図するような経済成長が行われるように経済政策を立案しても、各期間において起こる偶発要因により当初の計画どうりに経済諸変量は成長しない。そこで不確定要素も考慮にいれたシミュレーションを多数行い、その中からよりよい政策を検討しなければならない。攪乱項の従う確率密度関数が（１４）式で与えられるので、シミュレーションについては図－１に示すとうりである。

$$p\,(x_k \mid x_{k-1},\ u_{k-1}) = C\exp\left(-1/2\,\xi_{k-1}^{T}\,\Sigma_{\xi}^{-1}\,\xi_{k-1}\right) \qquad (14)$$



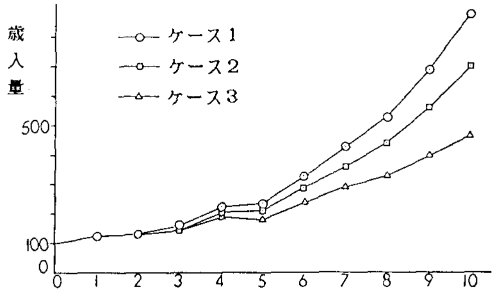
図－１　予測シミュレーションのフローチャート

５．仮想モデルを用いた計算例

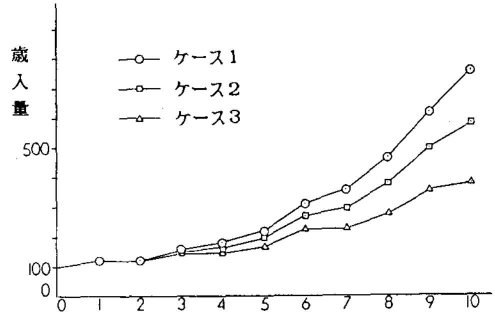
経済諸変量として、$x_j^1(t)$：住宅立地量、$x_j^2(t)$：商業立地量、$x_j^3(t)$：工業立地量、$x_j^4(t)$：地価、$x_j^5(t)$：道路関係投資ストック量、$x_j^6(t)$：設備関係投資ストック量、$x^7(t)$：歳入、$u_j^1(t)$：道路関係投資量、$u_j^2(t)$：設備関係投資量、t：期間、j：ゾーン数（j＝1～5）を用いて計量経済モデルを作成した。ここでの計画期間長は１０年とした。

計算は、ケース１として従来の確率制御をもちいて投資割合を決定した場合、ケース２として各期間毎に最適投資割合を決定した場合、ケース３として各期間毎に乱数による投資割合の決定を行った場合について、攪乱項に分散を与え、図－１に示すシミュレーションを１００回行った。

そしてその中で目的関数値が最大となる歳入量の経年変化を図－２に、最小となるものを図－３に示す。



図－２　歳入量の経年変化（最大値）



図－３　歳入量の経年変化（最小値）

図－２においてケース１の目的関数値は３７４６となり、ケース１と比較してケース２は０．８５倍、ケース３では０．６７倍とかなり低い値となる。

図－３でのケース１の目的関数値は３２９１となり、ケース１の最大値と比較し０．８８倍で、攪乱項の影響が大きく作用しているのが分かる。他のケースも図－２の場合と同様の割合でケース１よりも低くなった。また残りの９８回のシミュレーションにおいてもケース１が他のケースよりも大きな値となった。

６．まとめ

本研究で示したような線形のシステム方程式、目的関数、制約条件を用いて計算を行った場合、どのような分散を持った攪乱項が含まれても確率制御を行った方が目的関数値を最大にすることができる。

ここではパラメータについては一定としたが、現実にはパラメータも時々刻々と変動しているので、このことを考慮に入れたシミュレーションを行う必要がある。また、適合計画を取り入れた制御についても検討を行う必要がある。