# Ⅳ-175　直線あてはめ覚書

八戸工業大学　正会員　岩淵清行

1.まえがき

Reduced Major Axis (略称RMA)は、1937年　H.E.JONES が初めて(ﾒﾄﾛﾝに)発表したあてはめ直線の一種である。この直線は従来厳密解(最小2乗法による直線)ではないと考えられていた。しかしこの直線は、X,Yの誤差分散の比率(K≡σy∧2/σx∧2)が定常数の時の解直線族の一員である事がわかった。なお K 既知の場合、一般的には測点Pi(xi,yi)の最確値Qi(xi+△xi,yi+△yi)を求める事は出来なかった。この覚書でそれに対する試案を示した。これがもし認められると、独立観測の時の直線あてはめの理論は一歩前進したことになる。(現時点における公式の全体を最後に示した)

2.記号

" ∧2 "...2乗,　　　　[ ]...ｶﾞｳｽの総和記号

" * "...乗算　ただし" . "で代用する事がある。

"Z≡a"　は a によって Z を定義する事

Yの Xへの回帰直線を y=A1*x+B1　と書く

Xの Yへの回帰直線　y=A2*x+B2

直交回帰直線　y=A3*x+B3

RMA　y=A4*x+B4

ここにA4≡SGN(A1)*√(A1*A2):B4≡YG-XG*A4　である。(SGNは符号関数)

測点はpi(xi,yi):i≡1,2,...,n:n>=3　測点が与えられるとA1,A2は　重心点G(XG,YG)の値と共に既知数扱いする。何故ならばそれらはxi,yiのみで計算されるから。

3.概説

直線あてはめ問題を次のように考える

| yi+△yi=a*(xi+△xi)+b　(ここにi≡1,2,...,n: n>=3)...........(1)
| なる△xi,△yi,a,b,を未知数とする非線形不定方程式を都合よく一意に解く事。

この場合未知数△xi,△yi,a,bを普通に解ける方程式をつくる。これを正規方程式という。MIKHAILに倣って式(1)を Condition eqationsという。従来の考えによると　RMAの場合最確値という概念が存在しないため(1)なる方程式も存在しなかった。このことは従来　K既知の場合一般的には測点の最確値が求めえなかった事と符合が合う。私は測点のもつ純粋に幾何学性質を使い、このときの合理的最確値の計算式を考えた。(昭和61年度土木学会東北支部技術研究会講演概要PP.352-353　参照)

さて　K が既知の時の従来の定説は

| yi=a*xi+b .............................(2) なる不能方程式を
| f≡Σ(a*xi+b-yi)∧2 / (K+a∧2) .........(3)なる目的関数 最小の如く

無理無理　解くものである。解がえられても未知数 a,b が満足すべきcondition eqationはなかった。私はこの 目的関数は定説をそのまま採用した。そして未知数△xi,△yi,a,bを求めるための正規方程式をつくった。(5.に示す)

4. RMAが最小2乗法による直線である事の証明

我々は　目的関数(3)を最小にする如く解く時の直線を最小2乗法による解の一つと呼ぶ事にする。　K≡A1*A2 の時我々は　y=A4*x+B4 そのものを得る。証明終わり。

5.Kが既知の時の正規方程式

yi+△yi=a*(xi+△xi)+b .......... (4)
△xi=Li*cosθ,△yi=Li*sinθ (5),(6)
a∧2+(k/A1-A2)*a-K=0 ,b=YG-XG*a (7),(8) ∂f/∂a=0,∂f/∂b=0よりえられる式
tanθ=A1*(a-A2)/(a-A1) (9)

ここに未知数は△xi,△yi,Li,θ,a,b （この正規方程式の解きかたは 6-3に示す）

6.おわりに 直線あてはめの 解公式 .....現時点における定説(一部試案を含む)

6-1 σxi∧2≡0,σyi∧2≡任意の場合

pi≡1/σyi∧2, Z≡[p.x.x][p]-[p.x]∧2, a≡([p.x.y][p]-[p.x][p.y])/Z
b≡([p.x.x][p.y]-[p.X][p.x.y])/Z, △xi≡0, △yi≡a*xi+b-yi

σyi∧2≡1とすると YのXへの回帰直線 y=A1*xi+B1 がえられる。ここにA1≡Sxy/Sxx,
B1≡YG-XG*A1, Sxy≡Σ(xi-XG)*(yi-YG), Sxx≡Σ(xi-XG)∧2

6-2 σxi∧2≡任意,σyi∧2≡0の場合

pi≡1/σxi∧2, Z≡[p][p.x.y]-[p.x][p.y], a≡([p][p.y.y]-[p.y]∧2)
b≡([p.y][p.x.y]-[p.x][p.y.y])/Z, △xi≡(a*xi+b-yi)/(-a), △yi≡0

σxi∧2≡1とすると XのYへの回帰直線 y=A2*x+B2 がえられる。ここにA2≡Syy/Sxy,
B2≡YG-XG*A2, Syy≡Σ(yi-YG)∧2

6-3 σxi∧2≡一定, σyi∧2≡一定 ... (Kが既知の場合)

U≡(K/A1-A2)/2,V≡√(U*U+K), a1≡-U+V,a2≡-U-V
a1とa2のうちA1と同符号のものをaとする。b≡YG-XG*a（従来の解は,ここまで）
θ≡ATN(A1*(a-A2)/(a-A1)) ....測点の幾何学からくる誤差論と独立な関係式
Li≡(a*xi+b-yi)/(sinθ-a*cosθ) ....(4),(5),(6)を連立させて解くと求まる
△xi≡Li*cosθ,△yi≡Li*sinθ .............. 従来この計算が出来なかった

| | |
|---|---|
| K≡∞の時 | YのXへの回帰直線 がえられる。 |
| K≡0 | XのYへの回帰直線 |
| K≡1 | 直交回帰直線 |
| K≡A1*A2 | RMA |

目的関数(3)式がY,Xに関し非対称の為(増山元三郎著 少数例のまとめ方2 参照)一般的には軸単位をかえると予測値が動く。しかしK=∞,A1*A2,0の三点は不動点である。

6-4 上記以外σxi∧2≡任意 σyi∧2≡任意の場合

(1)を線形化しa≡1, b≡1とおく(2点を通る直線から近似値を求める必要は無い)
wi≡a*xi+b-yi , hi≡σxi∧2*a*a + σyi∧2, pi≡1/hi
Z≡[p.x.x][p]-[p.x]∧2
△a≡([p.x][p.w]-[p.w.x][p])/Z, △b≡([p.w.x][p.X]-[p.x.x][p.w])/Z
a≡a+△a,b≡b+△b くりかへし計算をする。
△a≒0,△b≒0の時 △xi≡-a.pi.wi.σxi∧2, △yi≡pi.wi.σyi∧2

この解法はかってﾃﾞﾐﾝｸﾞの取り扱いといわれた。現在では「混合方程式」の場合といわれる。MIKHAILはこの解法を"General最小２乗法"という。しかし(1)の方程式の統一的一般解は未完成である。(それ故に 6-1,6-2,6-3の公式が必要となる。)

母数の推定に関してはまだ不明の点が多い(省略した)

7.参考文献 Curran,P.J.,and A.M.Hay,1986.The importance of measurment error for certain procedures in remote sensing at optical wavelengths,Photogrammetric Engineering and Remote Sensing,52:229-241