Ⅳ-61 ミニマルパス・ミニマルカットによる道路ネットワークの信頼度の近似計算法について

京都大学工学部　学生員　吉木　務
京都大学工学部　正　員　飯田　恭敬
大阪府立工業高等専門学校　正　員　若林　拓史

1．はじめに

道路網の信頼度を求めるため，信頼性グラフ理論に基づく，大規模ネットワークにも適用可能な計算法を開発する．この場合，信頼度の厳密値を計算するのは困難なため，効率的で実用的な近似計算法を提案する．

2．信頼度の近似計算法

ネットワークの特定の2点間に対し、ミニマルパスP_s，ミニマルカットK_sを用いた信頼度の厳密値Rは

$$R = E[\coprod_{s=1}^{p} \prod_{a \in P_s} X_a] \cdots (1) \quad R = E[\prod_{s=1}^{k} \coprod_{a \in K_s} X_a] \cdots (2)$$

で与えられる[1)]．ここに，X_aはリンクaが機能しているとき1，そうでないとき0となる確率変数であり，p，kは，パス数，カット数である．ネットワークが大規模となるとパス・カット数は膨大となりその探索作業，ブール演算による整理に要する計算は，指数的に増加し，(1)，(2)式による計算は不可能に近くなる．そこで計算を簡略化した近似計算を試みるが，簡略化には，次に示す(a)，(b)2つの方向が考えられる．

(a)計算に用いるパス・カット数の削減

(b)ブール演算の省略

これらを整理したものが表1である．

(a)による近似値は①厳密値を求めるのに比べ，計算時間，記憶容量共に大幅に節約できる，②上・下限が保証されている，という利点を有するが，ブール演算を行うため計算の煩雑は免れない．そこで，(a)，(b)を組み合わせた方法（表1の太線で囲まれた部分），すなわち，

$$R_p = \coprod_{s=1}^{p'} \prod_{a \in P_s} r_a \cdots (3) \quad R_k = \prod_{s=1}^{k'} \coprod_{a \in K_s} r_a \cdots (4)$$

により，近似計算を試みる．R_p，R_kの大小関係は不定であるが，それぞれp'，k'の増加にともない，R_pは下限値から上限値へ，R_kは上限値から下限値へと変化をする．すなわち，適当なp'（k'）のときに厳密値Rに近い値を示すのであり，この時に計算を打ち切れば良好な近似値を得る可能性がある．

この方法の利点は次のようであると考えられる．

①計算方法が極めて簡単である．

②ブール演算を経由しないので計算時間や記憶容量が少なくて済む．

③大規模ネットワークにも適用可能と思われる．

3．ミニマルパス（カット）の選択方法

一部のミニマルパス（カット）を用いた場合，その選択の方法は信頼度の計算結果に大きな影響を与える．そこで効率的に近似値を得るために，パス（カット）の選択方法を考察する．まず，パス（カット）集合の各要素をある基準により順序づける（（Ⅰ）～（Ⅲ））．次に順序づけられた上位からあるルール（①～③）により計算に使うパス（カット）を選択する．

以下，パスに対する順序づけと選択ルールについて述べる．

順序（Ⅰ）　生起確率に着目した順序づけ

式(7)のR_pの値はp'の増加関数となるため少数のパスで厳密値Rに接近するためにはR_pの値を大きくす

表1．近似計算の整理

	ブール演算をする		ブール演算をしない	
すべてのミニマルパス	厳密値	$E[\coprod_{s=1}^{p} \prod_{a \in P_s} X_a]$	上限値	$\coprod_{s=1}^{p} \prod_{a \in P_s} r_a$
一部のミニマルパス	下限値	$E[\coprod_{s=1}^{p'} \prod_{a \in P_s} X_a]$	不定	$\coprod_{s=1}^{p'} \prod_{a \in P_s} r_a$
全てのミニマルカット	厳密値	$E[\prod_{s=1}^{k} \coprod_{a \in K_s} X_a]$	下限値	$\prod_{s=1}^{k} \coprod_{a \in K_s} r_a$
一部のミニマルカット	上限値	$E[\prod_{s=1}^{k'} \coprod_{a \in K_s} X_a]$	不定	$\prod_{s=1}^{k'} \coprod_{a \in K_s} r_a$

るようなパスを選択すればよい．そのため，Πr_aの大きいパスが上位になるよう順序づける．

順序（Ⅱ）　経路距離に着目した順序づけ

$0<r_a\leqq 1$から式の値を規定するのは次数の小さい項である．したがって，式(7)が$(1-\Pi r_a)$の積から成り立っていることを考えて，r_aの次数の小さいミニマルパスから選択すればよいことを示している．r_aの次数はリンク数に規定され，r_aの値はリンク長に比例しているので，経路距離に関する最短経路探索問題として扱える．この時，経路距離の短いパスが上位となる．

順序（Ⅲ）　経路距離に生起確率を考慮した順序づけ

順序（Ⅱ）において同じ距離のパスがある場合には順序（Ⅰ）により生起確率の高いパスを上位として順序づける．

ルール①　リンクの重複を許さない選択法

信頼度の計算は本来ブール演算を施すのであるが，ミニマルパスに含まれるリンクに重複がなければその必要がなく，(a)のみによる方法と同じ結果を与える．

ルール②　リンクに関する１次独立性を用いる選択法

ルール①で選択されたミニマルパスの数が少ない場合には，悪い近似を与える可能性がある．そこでリンクの重複は許し，しかし，それを最小限とするためリンクに関して１次独立なパスを選択してみる．

ルール③　上位から制約なしに選択する方法

①②での制約を緩和し，ただ単に上位からp’個選択する．p’を変化による計算値の変動を考察できる．

また，r_aの代わりに$(1-r_a)$を代入すればカットに対しても同様の選択法が考えらる．

４．モデル計算の方法と計算結果

３節で述べた選択方法の特徴を調べ，最も効果的な方法を選択するために簡単なネットワークを対象にモデル計算を行った．一般的な挙動を調べるため，各リンクの信頼度r_aを0から1までの乱数で与え，統計的な考察を行う．

ルール①の計算値は計算に用いるパス（カット）の数が少なく近似値としては不十分であったが，ルール②の値は厳密値Rに近い値が得られ，特に順序（Ⅰ）または（Ⅲ）からの選択では近似値として十分と思われる．しかし，計算の簡略化という観点から１次独立性の判定計算が必要なのは好ましくない．

図１は図中に示すネットワークのノードペアに対し，ルール③による計算値の変化の１例である．パス（カット）の選択数が1/3程度で十分良好な近似値を与えている．また，順序（Ⅰ）による計算値はパス，カット共に滑らかにかつ早く上限値，下限値に収束しているのに対し，順序（Ⅱ）による計算値は不安定な挙動を示している．そして，ルール③をふまえ，新たな近似値決定法を考察する．

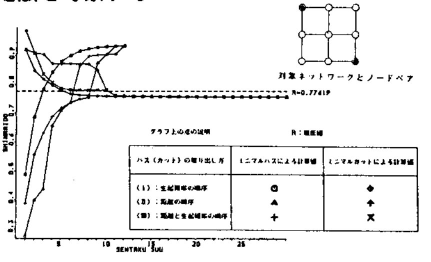

図１．ルール③による計算値

５．近似値決定法の提案

図１のグラフにおいて，順序（Ⅰ）の曲線は少ない選択数で急速に厳密値に接近している．そこでパスによる曲線とカットによる曲線の交点を近似値とすることを考える．この場合パス（カット）の選択数は数個で済み，交点の値は容易に計算できる．そこで，上と同様に，r_aを乱数で与え50回試行した場合にこの交点と厳密値との差が，どの程度なのかを図２に示し、図３にはそれを度数分布に表した．また，別のノードペアに対しての計算結果を図４に示す．この結果からこの方法は効果的な近似計算法として有効と考えられる．

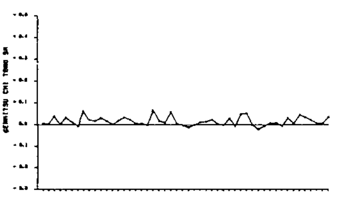
図２．交点と厳密値との差の変動

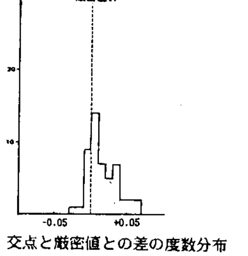

図３．交点と厳密値との差の度数分布

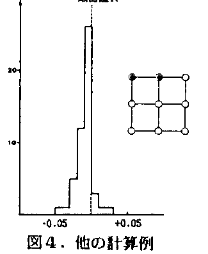

図４．他の計算例

参考文献　1)三根　久・河合　一：信頼性・保全性の数理，pp.108-116,朝倉書店,1982.