Ⅳ-60　信頼性グラフ理論に基づく交通ネットワークの信頼度の算出法について

大阪府立工業高等専門学校　正員　若林　拓史
京都大学工学部　正員　飯田　恭敬

１．はじめに

道路網整備水準の一指標として信頼性を考える．そのため，ＲＧＡ(信頼性グラフ理論)的アプローチを適用し，ミニマルパス・カットを用いて信頼性を計量化する．その際，厳密値を求めることは膨大な計算を必要とするので，実用的な近似値を効率的に計算する方法を考察する．

２．すべてのミニマルパス,カットを対象とした計算法

ネットワークのリンクａに確率変数X_a(リンクａが機能しているとき１，そうでないとき０)を対応させた場合，特定の２点間の信頼度の厳密値Ｒは，

$$R = E[\coprod_{s=1}^{p} \prod_{a \in P_s} X_a] \equiv E[1 - \prod_{s=1}^{p}(1 - \prod_{a \in P_s} X_a)] \quad (1)$$

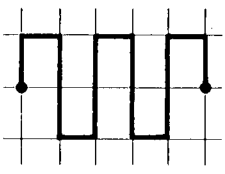
$$R = E[\prod_{s=1}^{k} \coprod_{a \in K_s} X_a] \equiv E[\prod_{s=1}^{k}\{1 - \prod_{a \in K_s}(1 - X_a)\}] \quad (2)$$

で与えられる[1]．ここに，P_s, K_sは，ミニマルパス，カットであり，ｐ,ｋは，パス数，カット数である．この計算は，ブール代数を用いるため，ネットワークが大きくなると膨大な計算が必要となる．そこで上限値U_1，下限値L_1を用いることが考えられる．すなわち，

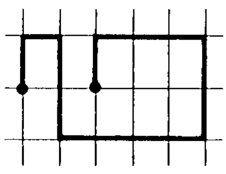
$$U_1 = \coprod_{s=1}^{p} \prod_{a \in P_s} r_a \quad (3)$$

$$L_1 = \prod_{s=1}^{k} \coprod_{a \in K_s} r_a \quad (4)$$

で与えられ，$L_1 \leqq R \leqq U_1$となる[1]．ここにr_aは，リンクの信頼度$r_a = E[X_a]$である．この他にも，上・下限値を与える方法は確率の加法定理[2]等があるが，式(1)～(4)とともに対象とする２点間のミニマルパス，カットをすべて必要とする方法である．そして，ネットワークが大規模になればミニマルパス，カットの数も膨大となり，それらの探索作業も膨大となるという



図－１　ジグザグのミニマルパス



図－２　大まわりのミニマルパス

欠点がある．さらに，ミニマルパスの中には，図のように２点間をジグザグに経路をとるものや，大回りのミニマルパスが多く含まれ（ミニマルカットについては，双対ネットワークを考えることでパスと等価的に考えることができる），これらのパスに交通工学的な意味づけが与えられるかという問題がある．さらに，これらの交通の経路としては実際的でないパスやカットが，信頼度Ｒの値にどのぐらい寄与しているかが不明確である．そして，この寄与の程度が小さければ，それらのパス，カットを計算対象から除外し，一部のパス，カットを用いる近似計算法が考えられる．

３．一部のミニマルパス,カットを利用する近似計算法

いま，式(1)，(2)を一部のミニマルパス，カットを用いて評価することを考える．その要素の個数をｐ'(＜ｐ)，ｋ'(＜ｋ)とすると，下限値L_2，上限値U_2を得ることができる（証明は省略）．すなわち，

$$L_2 = E[\coprod_{s=1}^{p'} \prod_{a \in P_s} X_a] \quad (5)$$

$$U_2 = E[\prod_{s=1}^{k'} \coprod_{a \in K_s} X_a] \quad (6)$$

また，式(3),(4)に対しては，

$$R_p = \coprod_{s=1}^{p'} \prod_{a \in P_s} r_a \quad (7)$$

$$R_k = \prod_{s=1}^{k'} \coprod_{a \in K_s} r_a \quad (8)$$

であり，次式が成立する．

$$L_2 \leqq R_p \;,\; R_k \leqq U_2 \quad (9)$$

式(1),(2)は，すべてのミニマルパス，ミニマルカットを対象にブール演算を行うと信頼度Ｒの厳密値を与えた．これに対し，式(5),(6)は，一部のミニマルパス，ミニマルカットを対象にブール演算を行うと，ミニマルパスに基づく式は信頼度の下限値を，ミニマルカットに基づく式は上限値を与えることを示している．そして，パス(カット)の数を多くするほどこれらの近似値は厳密値に近づくが，計算時間も指数的に増加するという性質がある．したがって，適当なパス(カット)数で計算を打ち切れば，良好な近似値を得る可能性が

ある．また，式(7),(8)では，パス(カット)数に関して，下(上)限値から上(下)限値へと向かう性質があり，どこかで厳密値と交差する．したがって，適当なパス(カット)数を考えることによって，より実際的な近似値を求めることができると考えられる．以上の結果をまとめると表－１のようになる．

表－１　ミニマルパス(カット)の利用の仕方による信頼度の相違

パス(カット)の種類 ＼ ブール演算	ブール演算をする	ブール演算をしない
すべてのミニマルパス	厳密値 式(1)	上限値 式(3)
一部のミニマルパス	下限値 式(5)	不定 式(7)
すべてのミニマルカット	厳密値 式(2)	下限値 式(4)
一部のミニマルカット	上限値 式(6)	不定 式(8)

４．ミニマルパスの選択方法

一部のミニマルパスを用いた場合，ミニマルパスの選択の如何によって信頼度の良否が左右されると考えられる．本節では，式(5)を中心に効率的な信頼度計算のためのパスの選択方法を考察する．

(Ⅰ)生起確率に着目した順序づけと選択ルール

式(5)による値L_2は，下限値であるから，少ないパス数で厳密値に接近するためにはL_2の値を大きくするようなパスを選択すればよい．そのため，Πr_aの大きいパスから選択することを考える．したがって，まず最初に，ミニマルパスを生起確率の大きい順に順序づける．そして，パスの選択は以下のルールを考える．

ルール①　生起確率の高いパスから順にリンクの重複がないように上位からｐ’個のミニマルパスを選ぶ．この方法では，リンクに重複がないため計算を複雑化するブール代数演算を避けることが可能である．さらに，パスの生起確率 Πr_aは，対数をとることにより次のように変形できる．

$$\log(\Pi r_a)=\log r_1+\log r_2+\cdots+\log r_l \quad (10)$$

ここに，lはパスを構成するリンク数である．ここで，$0<r_a\leqq 1$であることを考慮し，各リンクに$-\log r_a$を対応させる．すると生起確率の大きいパスから選択することは最短ルートを探索することと等価になり，最短経路探索問題を繰り返し解く問題に帰着する．

ルール②　リンクに関して１次独立なミニマルパスを上位からｐ’個選ぶ．これは，ルール①で選択されたミニマルパスの数が少ない場合には，悪い近似を与える可能性がある．そこで，Πr_aが大きくリンクが重複していないパスを多数選ぶことができれば理想的であるが，これはなかなか困難なことであると考えられる．そこで，リンクの重複を許すがこれを最小限にするため，１次独立なパスの概念を導入したものである．

ルール③　①，②のルールを緩和し，ミニマルパスを単に上位からｐ’個選ぶ．これは，最短経路，２番目最短経路，…を順次求める問題となる．

(Ⅱ)パスの経路距離に着目した順序づけと選択ルール

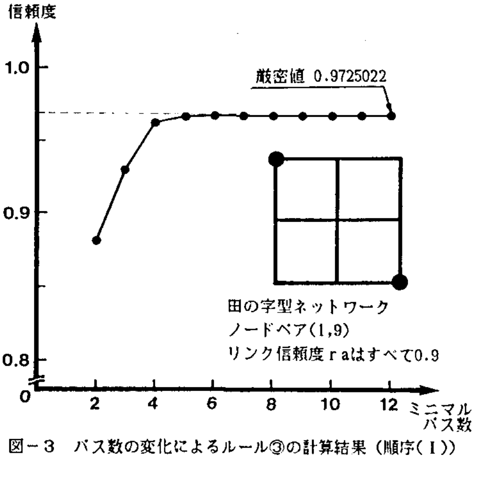
もう一つの近似法を考える．式(5)を要素の信頼性に関して次数が同じものを集め再整理すれば

$$L_2=\sum_{a} O_1(r_a)+\sum_{a1}\sum_{a2} O_2(r_{a1}\, r_{a2})+\cdots \quad (11)$$

をうる．$0<r_a\leqq 1$であるから式の値を規定するのは次数の小さい項と考えると，式(5)が，$(1-\Pi X_a)$の積から成り立っていることを考えて，X_aの次数の小さいミニマルパスから選択すればよいことを示している．リンクの導通確率r_aはリンク長に比例すると考えられるから，これは経路の距離に関する最短経路探索問題に帰着する．選択ルールは，(Ⅰ)と同じである．

５．計算例（ブール代数を用いる方法：式(5)による）

田の字型ネットワークの図中のノードペアを対象に，(Ⅰ)と③の組合せによる計算結果を示す．最初の数個のパスで十分，近似値とできることがわかる．



図－３　パス数の変化によるルール③の計算結果（順序(Ⅰ)）

参考文献　1）三根　久・河合　一：信頼性・保全性の数理，pp.108-116，朝倉書店，1982.，２）小林正美：道路網・ネットワークシステムの信頼度解析法に関する研究，都市計画別冊，No.15，pp.385-390，1980.