土木学会第42回年次学術講演会（昭和62年９月）

III-208　応力と浸透流の連成解析における時間差分について

清水建設(株) 大崎研究室　正員　櫨田 吉造

1. はじめに

応力と浸透流の連成解析は、土質力学における圧密解析を含めると、これまでに数多くの研究が行われている。その中で、多次元問題を扱った解析は有限要素法を用いたものがほとんどであり、この意味で、空間軸について有限要素法を適用することは一般的となっている。しかし、時間軸について言及した研究は、従来あまり行われていないように思われる。本報告は、時間軸に対して適用される差分スキームについて、若干の検討を行ったものである。

2. 支配方程式と時間差分

応力と浸透流の連成問題に関する支配方程式は、(1)式に示される平衡方程式と(2)式の浸透流方程式によって構成される。

$$\left[-\frac{1}{2}C_{ijkl}(u_{k,l}+u_{l,k})+\xi\delta_{ij}\rho_w h\right]_{,j}+\rho_s f_i-\xi\delta_{ij}\rho_w\delta_{3j}=0 \tag{1}$$

$$-\xi\frac{\partial u_{i,i}}{\partial t}+\frac{1}{\eta}\frac{\partial h}{\partial t}-(Kh_{,i})_{,i}=0 \tag{2}$$

ここで、ξは高い非圧縮性固体の場合$\xi=1$となり、ηは非圧縮性固体で非圧縮性流体の場合$\eta=\infty$となる。また、(1)式中のhに関する項と(2)式中のu_iに関する項によって連成問題となる。(1)および(2)式は、まず有限要素法が適用され、空間軸に関して離散化される。さらに、平衡方程式について時間微分が取られると次のような形となる。

$$K^{ik}_{\alpha\beta}\dot{u}^{\beta}_{k}+H^{i}_{\alpha\beta}\dot{h}^{\beta}=\dot{F}^{i}_{\alpha} \tag{3}$$

$$M^{i}_{\alpha\beta}\dot{u}^{\beta}_{i}+C_{\alpha\beta}\dot{h}^{\beta}+D_{\alpha\beta}h^{\beta}=B_{\alpha} \tag{4}$$

ここで、

$$K^{ik}_{\alpha\beta}=-\int_V\frac{1}{2}(C_{ijkl}+C_{ijlk})\Phi_{\alpha,j}\Phi_{\beta,l}dV、\qquad H^{i}_{\alpha\beta}=\int_V\xi\rho_w\delta_{ij}\Phi_{\alpha}\Phi_{\beta,j}dV \tag{5),(6}$$

$$F^{i}_{\alpha}=\int_V\rho_s f_i\Phi_{\alpha}dV+\int_A T_i\Phi_{\alpha}dA \tag{7}$$

$$M^{i}_{\alpha\beta}=-\int_V\xi\Phi_{\alpha}\Phi_{\beta,i}dV、\qquad C_{\alpha\beta}=\int_V\frac{1}{\eta}\Phi_{\alpha}\Phi_{\beta}dV \tag{8),(9}$$

$$D_{\alpha\beta}=\int_V K\Phi_{\alpha,i}\Phi_{\beta,i}dV、\qquad B_{\alpha}=\int_A q\Phi_{\alpha}dA \tag{10),(11}$$

従来、(4)式に対して中央差分が用いられてきたが、ここでは一般形差分を用いることによって、次式を導びく。

$$\begin{bmatrix} K^{ik}_{\alpha\beta} & H^{i}_{\alpha\beta} \\ M^{k}_{\alpha\beta} & (1-\alpha)\Delta tD_{\alpha\beta}+C_{\alpha\beta}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\Delta u^{\beta}_{k} \\ h^{\beta}_{(t+\Delta t)}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\Delta F^{i}_{\alpha}+H^{i}_{\alpha\beta}h^{\beta}_{(t)} \\ (-\alpha\Delta tD_{\alpha\beta}+C_{\alpha\beta})h^{\beta}_{(t)}+\{(1-\alpha)\Delta tB_{\alpha(t+\Delta t)}+\alpha\Delta tB_{\alpha(t)}\}\end{Bmatrix} \tag{12}$$

ここで、$\alpha=1$のとき前進差分、$\alpha=0.5$のとき中央差分、$\alpha=0$のとき後退差分を表す。

3. 時間差分の検討

(12)式中のαの値を0.5(中央差分)、0.2、0.0(後退差分)と変えたとき、解がどのように影響されるかを検討する。例題として、平面歪における一次元問題を考える。計算条件と計算モデルは、表-1および図-1にそれぞれ示す。

表-1 計算条件

w	100t/m^2
H	10m
E	50000t/m^2
ν	0.25
K	3.6×10^{-4}m/hour

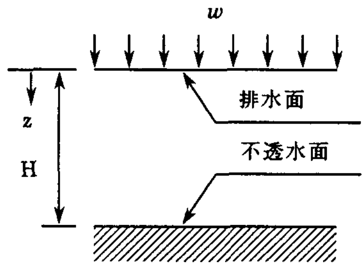

図-1 計算モデル

4. 計算結果

図-2は、排水面より1m下の点(z=1m)における過剰間隙水圧を時系列で示したものである。また、図-3は、中間点(z=5m)での過剰間隙水圧を表したものである。図中の実線は、理論解の結果である。図-2を見ると、時間刻みΔtを0.2とした場合、α=0.5(中央差分)の結果は理論解を挟んで上下に振動しているのがわかる。Δt=1.0とすると、その振幅はさらに大きくなっている。これに比べて、α=0.2およびα=0.0(後退差分)とすると、解は振動せずに理論解に漸近しており、Δt=1.0とした場合も、理論解からは離れるが振動していないことがわかる。

一方、図-3を見ると、α=0.2およびα=0.0の時と同様に、α=0.5の時も振動せずに理論解に漸近しているのがわかる。つまり、荷重点近傍においてのみ振動解が発生し、その影響は少し離れると無くなるものと思われる。

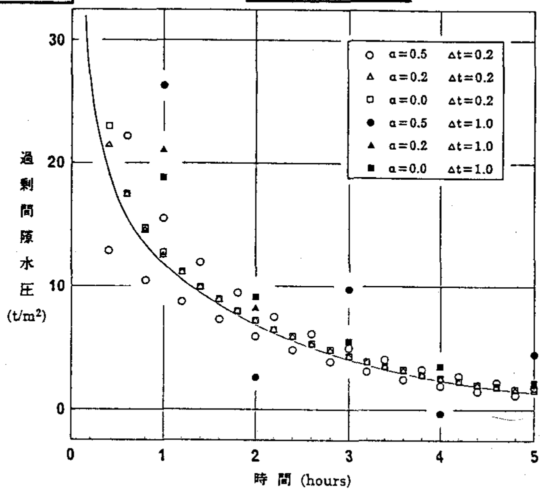

図-2 過剰間隙水圧の時間変化(z=1m)

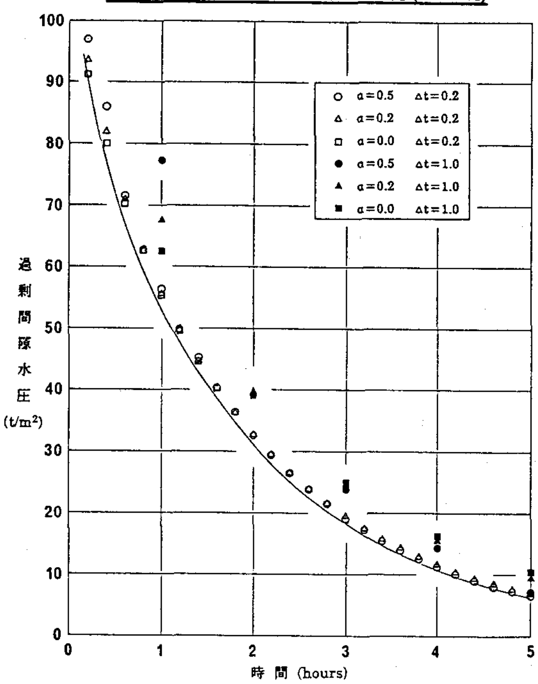

図-3 過剰間隙水圧の時間変化(z=5m)

5. 結論

一般形差分の場合、通常、α=0.5(中央差分)が離散化誤差を最も小さくするとされている。しかし、解が指数関数的となった場合、むしろα=0.122とした方が最適となることが知られている[1]。応力と浸透流の連成問題も時間に関しては指数関数的であると思われるので、前述の理由により、中央差分よりむしろ後退差分に近い形の方が離散化誤差を小さくし、より安定な解が得られるものと思われる。

6. 参考文献

1) 戸川隼人、「微分方程式の数値計算」、p38、オーム社、(昭和58年)