

III-119 三笠の自重圧密方程式の一差分解法

徳島大学工学部 正 山上拓男
仁田ソイロック（株） 正 仁田忠宏

1. まえがき

浚渫粘土で埋立てられた地盤の如き非常に軟い粘土の自重圧密過程は、三笠の自重圧密方程式で解かれることが多い。そしてこのための差分解法が三笠¹⁾や高田²⁾³⁾⁴⁾により提案され、各所で活用されてきた。ところが粘土地盤の初期状態がある限度以上に軟弱になると、彼らの差分解法では解が不安定となり、事実上計算が不可能となることが指摘されている。このため、例えばポンプ船による高含水比の浚渫粘土の圧密を直接計算することはできず、こうした状況に対しては埋立後ある程度自重圧密した時点でサンプリングを行い、その含水比分布を初期条件として計算すべきことや、遠心力載荷装置を用いた実験、などが推奨されている。しかしながら、これら2つの方法は時間的・経済的制約のある場合、必ずしも実行可能な方策とは言い難い。換言すると、可能ならば超軟弱領域においても安定かつそれなりに精度を保った数値解法の開発が望まれるところである。このような観点から、ここでは Douglas・Jones⁵⁾が提案し、Remsonら⁶⁾が詳しく述べている非線形放物形微分方程式の予測子・修正子法による解法を三笠の圧密支配式に適用することを考える。

2. Douglas・Jonesの予測子・修正子法の要約

時間 t と空間 x を独立変数とするある任意の関数 $u(x, t)$ に関して、次式でその一般形が与えられる微分方程式を対象とする：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = g_1(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t}) + g_2(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}) \quad (1)$$

ここに、 g_1, g_2 はともにカッコ内に示された引数を変数とする任意の関数である。このとき、Douglasらの差分解法における予測子と修正子はそれぞれつぎのように与えられている：

$$\begin{aligned} \text{予測子} : \quad & \frac{u_{i+1,j+1/2} - 2u_{i,j+1/2} + u_{i-1,j+1/2}}{\Delta x^2} = \\ & g_1(x_i, t_{j+1/2}, u_{i,j}, \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x}, \frac{u_{i,j+1/2} - u_{i,j}}{\Delta t/2}) + g_2(x_i, t_{j+1/2}, u_{i,j}, \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x}) \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \text{修正子} : \quad & \frac{1}{2} \frac{(u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}) + (u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j})}{\Delta x^2} = \\ & g_1(x_i, t_{j+1/2}, u_{i,j+1/2}, \frac{u_{i+1,j+1/2} - u_{i-1,j+1/2}}{2\Delta x}, \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta t}) + g_2(x_i, t_{j+1/2}, u_{i,j+1/2}, \frac{u_{i+1,j+1/2} - u_{i-1,j+1/2}}{2\Delta x}) \end{aligned} \quad (3)$$

ここに、 $\Delta x, \Delta t$ はそれぞれ x, t 軸方向の差分間隔、添字 (i, j) などは差分の格子点を表す。上式(2)の意味するところは、時刻 $t = j\Delta t$ における x 軸上のすべての格子点 i において u の値が既知であるとき、この式から時刻 $t = (j+1/2)\Delta t$ での u の値を求めるというものである。そして、こうして求められた時刻 $(j+1/2)\Delta t$ での u の値： $u_{i,j+1/2}$ など、を式(3)に用いると、これから時刻 $(j+1)\Delta t$ の解 $u_{i,j+1}$ が定められる。すなわちこの解法は1つのタイムステップを2段階に分けて計算することにより、解の安定性と精度の向上が計られているのである。しかもこの差分近似はCrank-Nicolson形の陰解法である点を強調しておきたい。これに対し、従来三笠の圧密方程式の差分解に採用されてきた手法は陽解法であって、数値解析上種々の制約が課せられたのもむべなるかなである。

3. 三笠の圧密方程式との対応

三笠の導いた自重圧密方程式の一般形は次式で与えられる：

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \xi^2 \left\{ C_v \frac{\partial^2 \xi}{\partial z_0^2} + \frac{dC_v}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial z_0} \right\} - \frac{d}{d\xi} (C_v m_v \gamma') \frac{\partial \xi}{\partial z_0} \quad (4)$$

上式中の各記号の意味の説明は割愛する。参考文献を参照されたい。いま、この式を変形して次式を書くことができる：

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial z_0^2} = \frac{1}{C_v \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{1}{C_v} \left\{ \frac{d}{d\xi} (C_v m_v \gamma') - \frac{dC_v}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial z_0} \right\} \frac{\partial \xi}{\partial z_0} \quad (5)$$

式(1)と(5)を対照し、 $u \rightarrow \xi$ 、 $x \rightarrow z_0$ と読み換えれば明らかなように、式(5)は式(1)の一般形に完全に包含されている。したがって前記した予測子・修正子法がそのまま適用し得ることになる。このとき、

$$g_1 = \frac{1}{C_v \xi^2}, \quad g_2 = \frac{1}{C_v} \left\{ \frac{d}{d\xi} (C_v m_v \gamma') - \frac{dC_v}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial z_0} \right\} \frac{\partial \xi}{\partial z_0} \quad (6) \quad \text{である。}$$

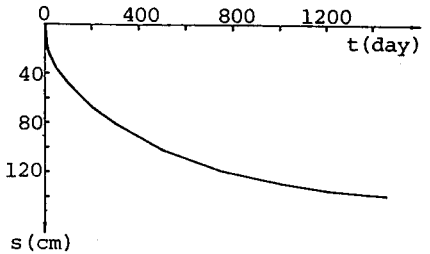
4. 差分方程式の3項行列表示

式(2)、(3)において、既知量を右辺に、また未知量を左辺に移行すると、その結果得られる連立方程式はいわゆる3項行列（3重対角行列）で表示し得ることが容易に知られる。ただし、紙面の都合上詳細を記すことはできないが、粘土層が上下両面排水の場合と片面排水とでは境界条件の処理と係わって、2つのタイプの3項行列を取り扱わねばならない。すなわち、粘土層が両面排水のとき、境界条件としての ξ の値が既知となるため、正値対称3項行列が導かれるのに対し、片面排水では不透水面の境界条件（ $\partial \xi / \partial z_0 = m_v \gamma'$ at $z_0 = H_0$ 、ここに H_0 ：粘土層の層厚）に起因して非対称3項行列となる。しかも、この場合の境界条件の複雑さから、解を得るのに片面排水問題では反復計算も必要である。いずれにせよ、予測子、修正子あるいは両面排水、片面排水にかかわらず、式(7)の形の連立方程式を解かねばならない。しかし幸いなことに、対称、非対称を問わず、3項行列の連立方程式を解くプログラムは各所で用意されているので、それらを利用するとよい。

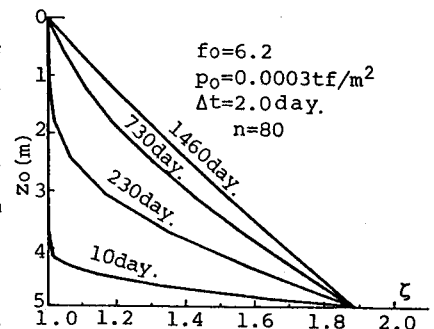
$$A u = b \quad (7)$$

5. 適用例と結び

ここでは、高田⁴⁾により不安定現象が生じる例として取り上げられている問題への適用結果を示す。問題は層厚 $H_0 = 5$ m、原始状態の体積比 $f_0 = 6.2$ 、初期応力 $P_0 = 0.0003$ tf/m²、 f -log P 曲線は彼らの標準圧密曲線（ $C_c = 0.8$ ）を有する粘土層の上下両面排水時の自重圧密解析である。圧密係数は一定とし、 $C_v = 0.003$ m²/dを用いた。この粘土層を深さ方向に80等分し（ $n = 80$ 、 $\Delta z_0 = 5/80$ m）、タイムステップは $\Delta t = 2$ dayとして解いた。図一に経過時間に伴う地表面の沈下性状を、また図二には圧密比 ξ の時間的推移を示した。図二にみられるように、 ξ は極めて自然な分布をみせており、この計算の過程でなんら不安定な現象は生じなかった。CPUタイムは徳島大学FACOM M-360で圧密開始後1460日までの計算に13.68秒であった。もっとも、この例では Δt = 一定としており、圧密の進行とともに Δt を徐々に大きくするならばこの演算時間ははるかに短縮できるはずである。ともかく本手法は十分実用的であるとの感触を得た。今後、種々の条件のもとでの実績を積み重ねてゆく予定である。



図一 沈下の経時変化



図二 圧密比の時間推移

〔参考文献〕

- 1) 三笠：軟弱粘土の圧密、鹿島出版。
- 2) 高田、今井、木山：浅深粘土の圧密沈下(その2)、土と基礎、1979-5, pp. 71~。
- 3) 高田：一次元圧密終了状態の数値計算法、土と基礎、1981-12, pp. 19~。
- 4) 高田：軟弱粘土の自重圧密過程の数値解析、土木学会論文報告集、第334号, pp. 113~。
- 5) Douglas, J. and B. F. Jones : On Predictor - Corrector Methods for Nonlinear Parabolic Differential Equations, J. Soc. Indust. Appl. Math., Vol. 11, No. 1, pp. 195~ , 1963.
- 6) Remson, I. et al. : Numerical Methods in Subsurface Hydrology, Wiley-Interscience, chapter 3, 1971