III-111 偏差エネルギーによる新しい3次元応力・ダイレイタンシー式について

東北大学工学部　正員　佐武正雄

1．まえがき

本文では，まず3次元の場合，偏差テンソルを複素数を用いて記述する新しい表現法を導入し，エネルギー増分テンソルを考察する。次に，粒状体の応力・ダイレイタンシー式（S-D式と略記）について，散逸エネルギー増分テンソルの偏差エネルギーを用い，その力学的意味を明確にするとともに，自然に導入される新しい3次元S-D式について説明する。

2．複素偏差量とエネルギー増分テンソル

まず，$x^3=1$ の根 $\omega=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ （$i=\sqrt{-1}$）を用いる3次元対称テンソルの分解について，応力テンソル$\underset{\sim}{\sigma}$を例として説明する。座標軸を$\underset{\sim}{\sigma}$の主軸にとり，

$$\underset{\sim}{I}=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix},\quad \underset{\sim}{J}=\begin{pmatrix}1&&\\&\omega&\\&&\omega^2\end{pmatrix},\quad \underset{\sim}{K}=\begin{pmatrix}1&&\\&\omega^2&\\&&\omega\end{pmatrix}=\overline{\underset{\sim}{J}} \tag{1}$$

とし，
$$\underset{\sim}{\sigma}=p\underset{\sim}{I}+q\underset{\sim}{K}+r\underset{\sim}{J} \tag{2}$$
と分解する。

$$\underset{\sim}{I}\cdot\cdot\underset{\sim}{I}=\underset{\sim}{J}\cdot\cdot\underset{\sim}{K}=3,\quad \underset{\sim}{I}\cdot\cdot\underset{\sim}{J}=\underset{\sim}{I}\cdot\cdot\underset{\sim}{K}=\underset{\sim}{J}\cdot\cdot\underset{\sim}{J}=\underset{\sim}{K}\cdot\cdot\underset{\sim}{K}=0 \tag{3}$$

に注意すれば，

$$p=\frac{1}{3}\underset{\sim}{I}\cdot\cdot\underset{\sim}{\sigma}=\frac{1}{3}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3),\qquad q=\frac{1}{3}\underset{\sim}{J}\cdot\cdot\underset{\sim}{\sigma}=\frac{1}{3}(\sigma_1+\omega\sigma_2+\omega^2\sigma_3),$$
$$r=\frac{1}{3}\underset{\sim}{K}\cdot\cdot\underset{\sim}{\sigma}=\frac{1}{3}(\sigma_1+\omega^2\sigma_2+\omega\sigma_3)=\overline{q} \tag{4}$$

となる。ここに，$\cdot\cdot$ はテンソルの複内積，$-$ は共役複素数を示し，σ（$\sigma_1\geqq\sigma_2\geqq\sigma_3$）は主応力である。p，qをそれぞれ平均応力，（複素）偏差応力と呼ぶ。これらは，2次元の場合の

$$p=\frac{1}{2}(\sigma_1+\sigma_2),\qquad q=\frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_2) \tag{5}$$

に対応するものであるが，3次元の場合，q は複素数になっていることに注意する。p，q はσに対して一意的に定義される量（不変量）で，式(2)の分解も一意的である。通常の偏差応力テンソルを $\underset{\sim}{\sigma}'$ とすれば，
$$\underset{\sim}{\sigma}'=q\underset{\sim}{K}+r\underset{\sim}{J}=q\overline{\underset{\sim}{J}}+\overline{q}\underset{\sim}{J} \tag{6}$$
となっているから，qは$\underset{\sim}{\sigma}'$に代わる偏差部分の表現と考えられる。
$$q=|q|e^{i\alpha} \tag{7}$$
とおけば，

$$|q|=\sqrt{\frac{S_2}{3}},\quad \cos 3\alpha=\frac{3\sqrt{3}}{2}\frac{S_3}{S_2\sqrt{S_2}},\quad \alpha=\tan^{-1}\frac{\mu}{\sqrt{3}}+\frac{\pi}{6} \tag{8}$$

となっている。S_2，S_3は $\underset{\sim}{\sigma}'$の第2，第3の不変量，μ はローデのパラメーターである。

いま，ひずみ増分テンソル $d\underset{\sim}{\varepsilon}$は $\underset{\sim}{\sigma}$と共軸と仮定し，
$$d\underset{\sim}{W}=\underset{\sim}{\sigma}\cdot d\underset{\sim}{\varepsilon} \tag{9}$$
によってエネルギー増分テンソル（粒状体の場合，散逸エネルギー増分テンソル）を導入する。式(2)，(6)と同様に，

$$d\underset{\sim}{\varepsilon}=\frac{1}{3}(dv\underset{\sim}{I}+d\gamma\overline{\underset{\sim}{J}}+d\overline{\gamma}\underset{\sim}{J}) \tag{10}$$
$$d\underset{\sim}{W}=\frac{1}{3}(dW\underset{\sim}{I}+dU\overline{\underset{\sim}{J}}+d\overline{U}\underset{\sim}{J}) \tag{11}$$

と分解する。ここに

$$dv=d\varepsilon_1+d\varepsilon_2+d\varepsilon_3,\qquad d\gamma=d\varepsilon_1+\omega d\varepsilon_2+\omega^2 d\varepsilon_3 \tag{12}$$
$$dW=dW_1+dW_2+dW_3,\qquad dU=dW_1+\omega dW_2+\omega^2 dW_3 \tag{13}$$

で，$d\gamma$を（複素）せん断ひずみ増分，dUを（複素）偏差エネルギー増分と称する。$\underset{\sim}{J}\cdot\overline{\underset{\sim}{J}}=\underset{\sim}{I}$ に注意すれば，式(9)より

$$dW=pdv+qd\overline{\gamma}+\overline{q}d\gamma,\qquad dU=qdv+pd\gamma+\overline{q}d\overline{\gamma} \tag{14}$$

の関係が得られる。　$d\gamma = |d\gamma|\,e^{i\beta}$　(15),　$dU = |dU|\,e^{i\theta}$　(16)
とおけば，β，θは，αと同様にそれぞれ $d\underset{\sim}{\varepsilon}$，$d\underset{\sim}{W}$ の中間主値 $d\varepsilon_2$，dW_2 の大きさを示すパラメーターであり，式(8)と同様の式が成り立つ。

3．応力-ダイレイタンシー式

Rowe によるS-D式は

$$\frac{\sigma_1 d\varepsilon_1}{\sigma_2 d\varepsilon_2} = \frac{dW_1}{dW_2} = -K^2 \quad (17), \qquad K = \tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\phi_0}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\sin\phi_0}{1-\sin\phi_0}} \quad (18)$$

と記述される。２次元の場合の散逸エネルギー増分テンソル $d\underset{\sim}{W}$ を考え，

$$dW = dW_1 + dW_2 \quad , \qquad dU = dW_1 - dW_2 \quad (19)$$

とおけば，式(17)は　$dU\sin\phi_0 = dW$　(20)　と記すことができ，この式は，変形過程で弾性エネルギーを無視すれば，散逸エネルギー増分 dW に対し偏差エネルギー増分 dUが極値をとるという変分原理から導くことができる。

３次元の場合，式(20)の自然な拡張として　$|dU|\sin\phi_0 = dW$　(21)　が得られる。式(16)により，さらに　$dU\sin\phi_0 = dW\,e^{i\theta}$　(22)　と記すこともできる[1]。

4．考　察

３次元の場合，新たに導入された偏差エネルギーによるS-D式(21)または(22)は，導入の過程から明らかなように，Rowe の式を出発点としている。しかし，式(14)の関係を代入すれば，Roscoeタイプの式

$$\frac{dv}{|d\gamma|} + 2\frac{|q|}{p}\cos(\alpha-\beta) = \left|1+\frac{|q|}{p}e^{-i(\alpha+2\beta)} + \frac{|q|}{p}\frac{dv}{|d\gamma|}e^{i(\alpha-\beta)}\right|\sin\phi_0 \quad (23)$$

が得られ，若干の近似を許せば，

$$\frac{|q|}{p} = \frac{1}{2\cos(\alpha-\beta) - \sin\phi_0\cos(\alpha+2\beta)}\left(\sin\phi_0 - \frac{dv}{|d\gamma|}\right) \quad (24)$$

と簡略化される。式(24)は Roscoe の式を改良した岸野の式[2]に酷似するものである。

$\dfrac{\partial}{\partial\beta}\dfrac{dW}{|dU|} = 0$　の条件によって，α，β $\left(0\leqq\alpha\leqq\dfrac{\pi}{3},\ 0\leqq\beta\leqq\dfrac{\pi}{3}\right)$ の間の関係を求めれば，

$$\sin(\alpha-\beta) + \sin\phi_0\sin(\alpha+2\beta) = 0 \quad (25)$$

という関係式が得られる。図－２は，式(25)を $\underset{\sim}{\sigma}$，$d\underset{\sim}{\varepsilon}$ の ローデのパラメーター μ，ν の関係に直して図示したものである。

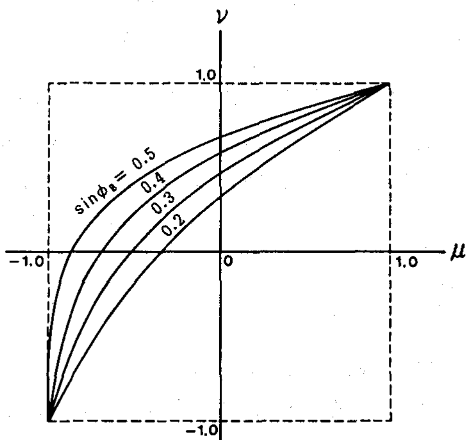

図 － 1

5．あとがき

本文では，従来，不自然な表現が用いられていた３次元S-D式に対して，散逸エネルギー増分テンソルの偏差エネルギーを用いて新しい３次元S-D式を導入し，若干の考察を行った。この式に対する検証，他のS-D式との関係，$\underset{\sim}{\sigma}$と $d\underset{\sim}{\varepsilon}$ が共軸性をもたない場合への拡張等についてさらに研究をすすめたいと思っている。

参考文献

1) 佐武 正雄：粒状体の塑性論に関する一考察，第22回土質工学研究発表会，1987
2) Y. Kishino, A Generalized Relationship between the Stress and the Dilatancy in Granular Materials, Mechanics of Granular Materials : New Models and Constitutive Relations, (Edit. by J. T. Jenkins and M. Satake), Elsevier, 1983