II-330　　河道における平面二次元流解析

（株）日水コン　正員　中川　芳一
（株）日水コン　正員　蔵重　俊夫
（株）日水コン　正員○平井　真砂郎

１．はじめに

河道掘削による河積の拡大、あるいは屈曲の是正による疎通能力の向上を図るといった河道改修を行なった場合、水衝部がどのように移動し、それに伴なって深堀れ位置あるいは堆積域がどのように移動していくかを予測することは河道計画上非常に有用である。しかしながら、一般の河道は非常に複雑な形状をしており、解析的・理論的な取扱いは殆ど不可能と考えられ、数値計算的なアプローチをとらざるを得ないと考える。そこで、著者らはこのような河道内の流れの解析に対して実用性の面から平面二次元流れの適用が妥当であると考え、その数値計算法として安定性ならびに精度の面で優れる２－step Lax-Wendroff スキームを用いて流れの解析を行なったものである。

２．基礎式および差分化

基礎式は以下に示すような水深方向に積分した平面二次元流に関する運動式および連続式である。

$$\frac{\partial M}{\partial t}+\frac{\partial (uM)}{\partial x}+\frac{\partial (vM)}{\partial y}=-gh\frac{\partial H}{\partial x}-\frac{\tau_{xb}}{\rho}\ \cdots(1)\qquad \frac{\partial N}{\partial t}+\frac{\partial (uN)}{\partial x}+\frac{\partial (vN)}{\partial y}=-gh\frac{\partial H}{\partial y}-\frac{\tau_{yb}}{\rho}\ \cdots(2)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial M}{\partial x}+\frac{\partial N}{\partial y}=0\quad\cdots(3)\qquad M=uh,N=vh$$

この（１）～（３）式をｈ、Ｍ、Ｎに関するconservation law form に書き直すと次式となる。

$$U_t+F_x+G_y=C\quad\cdots(4)$$

ここに、$U=(h,M,N)$　$F=(M, M^2/h+gh^2/2, MN/h)$　$G=(N, MN/h, N^2/2+gh^2/2)$

$C=(0, -ghi_{bx}-\tau_{xb}/\rho, -ghi_{by}-\tau_{yb}/\rho)$

（４）式に対してRichitmyer[1]による２－step Lax-Wendroff スキームは次式で表わされる。

〈１st step〉
$$U^{n+1}_{i,j}=\frac{1}{4}(U^n_{i+1,j}+U^n_{i-1,j}+U^n_{i,j+1}+U^n_{i,j-1})-\Delta t\left(\frac{F^n_{i+1,j}-F^n_{i-1,j}}{2\Delta x}+\frac{G^n_{i,j+1}-G^n_{i,j-1}}{2\Delta y}\right)+\Delta t C^n\quad\cdots\cdots(5)$$

〈２nd step〉
$$U^{n+2}_{i,j}=U^n_{i,j}-2\Delta t\left(\frac{F^{n+1}_{i+1,j}-F^{n+1}_{i-1,j}}{2\Delta x}+\frac{G^{n+1}_{i,j+1}-G^{n+1}_{i,j-1}}{2\Delta y}\right)+2\Delta t C^{n+1}_{i,j}\cdots(6)$$

このスキームにおいては、１st step は暫定的段階であると考えられ、２nd step の結果のみが重要である。このように２-step Lax-wendroffスキームは、運動量の保存則形を直接差分化するため、高水敷等で跳水が生じたとしても正しく計算する。実際の計算を行なう場合には、（５）式、（６）式をスカラー式に直す必要があるが、紙面の都合上省略する。

３．境界での計算法および平滑化プロセス

Lax-Wendroffスキームは三角形のスキームであり、上下流端境界においてはこのスキームは適用できない。そのため、常套手段として用いられるBox-schemeにより差分化した連続条件より計算する。その際、境界での水位変動は横断方向において一定とし、（７）式のように一次元の連続式に対してBox-schemeを適用する。

$$\frac{A_1^{n+1}-A_1^n}{\Delta t}+\frac{A_2^{n+1}-A_2^n}{\Delta t}+\frac{Q_2^{n+1}-Q_1^{n+1}}{\Delta s}+\frac{Q_2^n-Q_1^n}{\Delta s}=0\quad\cdots\cdots(7)$$

ここに、Ａ：流水断面積、Ｑ：流量、Δｔ・Δｓ：時間および空間差分間隔、1,2 ：上下流を表わす添字

上流端では通常、流量が与えられ、下流端では水位あるいはＨ－Ｑ曲線が与えられることから、断面積あるいは流量が求められ、それを境界の各メッシュに配分することによってｈ、Ｍ、Ｎが算定される。

Lax-Wendroffスキームは元来非常に強い安定性を有していることで知られているが、河道のような局所的に凹凸の激しい領域においては移流項が卓越した流れとなるため空間振動が生じやすい。このような空間振動は本来的には計算格子を細分化することにより回避できるものと思われるが、格子数の増加に伴なう計算時間の増大を考えると実用上好ましくない。また、圧縮性流体の解析においてよく用いられる人工粘性係数は、河道流のような緩まんな流れにたいしてはあまり効果がないことがわかった。そこで、本研究においては、通常差分モデルにおいて多用されている（８）式のような平滑化のプロセスを導入し、極端な水面振動、流速の不均衡を是正している。

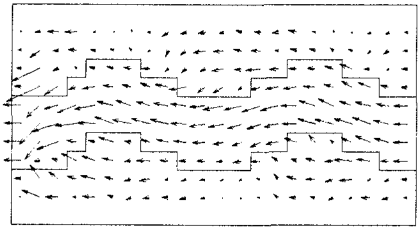
$$\bar{U}^{n}_{i,j} = \frac{1}{2}U^{n}_{i,j} + \frac{1}{8}\left(U^{n}_{i+1,j} + U^{n}_{i-1,j} + U^{n}_{i,j+1} + U^{n}_{i,j-1}\right) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (8)$$

４．数値事例

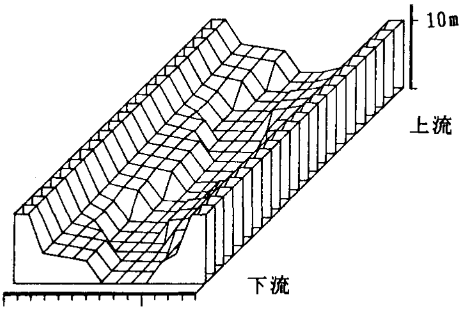
図－１に示す仮想的な湾曲河道に対して平面二次元流解析を適用した結果について述べる。表－１には、河道条件ならびに計算条件を示している。計算の方法としては、初期条件として不等流計算による水位および断面平均流速を与え、上流側境界条件を定常に保ったまま計算を続け、全メッシュが定常な状態になるまで計算を行なったものである。図－２および図－３は各々流速ベクトル図、水面形状を表わしているが、これによると下流端境界付近で水位、流速が若干動揺しているものの、低水路から高水敷への乗り上げ、あるいはその逆の高水敷から低水路への流れ込みといった現象が表現できていることがわかる。なお、各メッシュの水理量は十分な精度で収束している。このように、かなり急勾配の河道においても安定に計算を行なうことが可能であり、本モデルは実用性が高いと言えよう。なお、このモデルの感度分析ならびに実河川への適用結果については講演時に発表する予定である。

表－１　条件一覧表

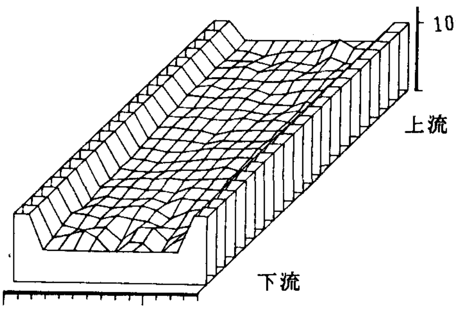
河道条件	計算条件
河道幅　：　200m 低水路幅：　80m 河道長　：　440m 河床勾配：1/200 粗度係数：対数則 (k_s=1.50m)	$\Delta x=\Delta y$=20m Δt=0.2 秒 平滑化ｽﾃｯﾌﾟ間隔 =50ｽﾃｯﾌﾟ 上流境界：流量 (Q=1500m3/s) 下流境界：H-Q ($H=0.126Q^{0.479}$)



図－２　流速ベクトル図（→　５m/s　）



図－１　河道形状



図－３　水面形状

５．おわりに

本稿では、河道内における流れを平面二次元流れとして取り扱い、２-step Lax-wendroffスキームにより差分化を行なって解析した。河道の流れは非線型項が卓越した流れであり、数値計算上非常に取り扱いにくいものであるが、本モデルでは境界条件の工夫ならびに平滑化プロセスの導入により安定に解析し得ることを示した。また、著者らはここに示した平面二次元流解析と併せた土砂動態解析システムも開発しており、これについては別の機会に報告する。最後に、本モデルの開発に当って貴重な御意見を戴いた京都大学中川博次先生に感謝致します。［参考文献］高橋亮一：コンピューターによる流体力学、構造計画研究所刊