

II-329

高速湾曲流に関する解析例

広島大学工学部 正 員 細田 尚
 広島大学工学部 正 員 余越 正一郎

1. はじめに; 本研究では、特性曲線法による高速湾曲流の数値解析例を示す。まず、本研究での解析法と von Karman, Lenau の研究との関係について述べた後、計算結果の考察を行う。流れを定性的に三種類に分類し、 R/B が大きくなるにつれて、計算結果は Lenau の解に漸近することを示す。

2. 基礎式¹⁾; 用いる基礎式は、次の特性曲線上の関係式を用いる。座標系を Fig. 1 に示す。

$$\mu_i(A_2^{-1}A_1 \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial U}{r \partial \theta}) = \mu_i(\lambda_i \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial U}{r \partial \theta}) = \mu_i A_2^{-1} B \quad (1)$$

ここに

$$U = \begin{pmatrix} h \\ v_r \\ v_\theta \end{pmatrix}, A_1 = \begin{pmatrix} r v_r, r h, 0 \\ g, v_r, 0 \\ 0, 0, v_r \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} r v_\theta, 0, r h \\ 0, v_\theta, 0 \\ g, 0, v_\theta \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -v_r h \\ v_\theta^2/r \\ -v_r v_\theta/r \end{pmatrix}$$

また、 h ; 水深、 v_r および v_θ ; 水深平均された流速ベクトルの r, θ 方向成分。 λ_i は $A_2^{-1}A_1$ の

$$\lambda_1 = \frac{v_r}{v_\theta}; \quad \mu_1 = (1, \frac{v_r}{g}, \frac{v_\theta}{g}) \quad (2a) \quad \text{固有値、}\mu_i \text{ は } \lambda_i \text{ に対する左固有ベクトルで、} \quad (2) \text{ 式のようになる。}$$

$$\lambda_2 = \frac{v_r v_\theta}{v_\theta^2 - g h} + \frac{\sqrt{g h} \sqrt{v_\theta^2 + v_r^2 - g h}}{v_\theta^2 - g h}; \quad \mu_2 = (\frac{\sqrt{g h} \sqrt{v_\theta^2 + v_r^2 - g h}}{h v_\theta}, 1, -\frac{v_r}{v_\theta}) \quad (2b)$$

$$\lambda_3 = \frac{v_r v_\theta}{v_\theta^2 - g h} - \frac{\sqrt{g h} \sqrt{v_\theta^2 + v_r^2 - g h}}{v_\theta^2 - g h}; \quad \mu_3 = (-\frac{\sqrt{g h} \sqrt{v_\theta^2 + v_r^2 - g h}}{h v_\theta}, 1, -\frac{v_r}{v_\theta}) \quad (2c)$$

2. 解析法; 解析法は参考文献1) とほぼ同様であるが、流線上の

$$\text{関係式 } h + \frac{(v_\theta^2 + v_r^2)}{2g} = h_0 + \frac{U_0^2}{2g} = H_0 \quad (3)$$

を用いて収束計算を行う。すなわち(3)式を次のように離散化する。

ただし、(3)式中 h_0, U_0 は上流端での水深、流速を表す。

$$h_{j^{n+1}} + \frac{v_\theta^{*j} v_\theta^{j^{n+1}} + v_r^{*j} v_r^{j^{n+1}}}{2g} = H_0 \quad (4)$$

j^n は座標 $r=R+(j-1) \cdot dr, \theta=d\theta \cdot (n-1)$ を表す。 v_θ^*, v_r^* の初期値として $v_\theta^{j^n}, v_r^{j^n}$ とおき、 $h_{j^{n+1}}, v_\theta^{j^{n+1}}, v_r^{j^{n+1}}$ を求める。この $v_\theta^{j^{n+1}}, v_r^{j^{n+1}}$ を v_θ^*, v_r^* に代入する。この手順を繰り返し、 $|h_{j^{n+1}} + \frac{v_\theta^{*j} v_\theta^{j^{n+1}} + v_r^{*j} v_r^{j^{n+1}}}{2g} - H_0| < \epsilon$

となれば次の $n+2$ 断面に進むようにした。壁面境界条件は参考文献2) と同様である。

3. 従来の研究³⁾ との関係; 微小な不連続の伝播する線に垂直な方向の連続式と運動量保存の関係式より次式が導かれている。(Fig.2 参照)

$$\frac{V d\theta'}{\cos \beta} = \frac{g dh}{V \sin \beta}, \quad \sin \beta = \frac{\sqrt{g h}}{V} \quad (5)$$

$$\text{上式と } h+V^2/2g=H_0 \text{ より } \frac{dh}{d\theta'} = \frac{2(H_0-h)\sqrt{h}}{2H_0-3h} \quad (6)$$

(6)式が導かれている。これらの結果は、本研究での特性曲線上の関係式からも誘導できる。微小な不連続の伝播する線は特性曲線であり、Fig.2 の場合はFig.3 の λ_3 に対応している。また、 β はFig.3 では $\delta-\gamma$ となる。ただし角度は $r=\text{const.}$ 線より反時計回りを正とする。 $\tan(\delta-\gamma)$ は(2)式より

$$\tan(\delta-\gamma) = \tan \beta = \frac{\sqrt{g h}}{\sqrt{v_\theta^2 + v_r^2 - g h}} \text{ となり、(5) 式と一致する。}$$

(6)式に関しては、次のように考えることができる。Fig.2 と同様に λ_3 で分けられる二つの領域を考え、 $r=\text{const.}$ 線を $\Delta\theta$ で折れる線で近似する。(Fig.4) λ_3 で分けられる領域の関係を

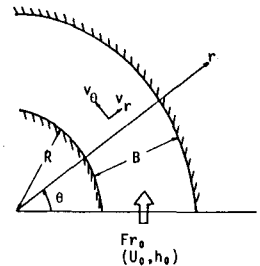


Fig.1 座標系

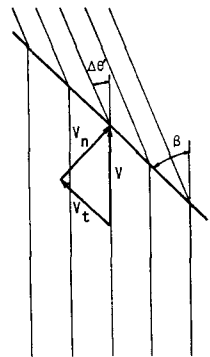


Fig.2

表すのは λ_2 上の関係式であり、 $D/r \cdot D\theta = \partial/r \cdot \partial\theta + \lambda_2 \partial/\partial r$ において λ_2 上の関係式を示せば、

$$\frac{\sqrt{gh} \sqrt{v_\theta^2 + v_r^2} - gh}{h} \frac{Dh}{r D\theta} + v_\theta \frac{Dv_r}{r D\theta} - v_r \frac{Dv_\theta}{r D\theta} = \frac{v_\theta^2 + v_r^2}{r} \quad (7)$$

となる。本研究で用いられている θ は円柱座標系での基準より測った角度でありFig.2の θ' とは異なる。両者の関係はFig.4より若干の計算の後

$$1 = \frac{d\theta}{d\theta'} + \frac{1}{v_\theta^2 + v_r^2} \left(-v_\theta \frac{dv_r}{d\theta'} + v_r \frac{dv_\theta}{d\theta'} \right) \quad (8)$$

となる。(8)式を用いれば(7)式は(6)式と一致することがわかる。

Lenau⁴⁾が用いている基礎式も、上流端境界条件が非回転であれば本研究と同一であり、 R/B が大きくなるにつれて計算結果はLenauの解(9),(10)式に漸近することが示される。

$$\frac{h_{\max}}{h_0} = 1 + Fr_0^2 \frac{B}{R+B/2} \quad (9), \quad \theta_{\max} = \frac{B}{R+B/2} \sqrt{Fr_0^2 - 1} \quad (10)$$

ここに $h_{\max}$, $\theta_{\max}$; 水路外岸上の水深の最大値と発生位置。

4. 計算結果の考察; 数値計算は Fr_0 , R/B を変化させて行った。計算結果を見ると、流れはおおまかに次の三種類に分類される。

- | | |
|---------|--------------------------------------|
| Type 1: | 水路側壁で水理量が極値をとる前に $Fr=1$ となり計算不能となる場合 |
| Type 2: | 衝撃波の発生により水理量が極値をとる前に計算不能となる場合 |
| Type 3: | 水路側壁で水理量が極値をとる場合 |

Type 1,2,3の領域区分をFig.5に示す。

Type 3 の場合について(9),(10)式と計算結果を比較したものが Fig.6, Fig.7 である。どちらも R/B の増加とともにLenauの解に漸近して行くのがわかる。

(参考文献) 1) 細田・岩佐・余越; 第29回水理講演会論文集, 1985, 2) 細田・余越; 第37回土木学会中国四国支部研究発表会講演概要, 1985, 3) Ippen; Tran. ASCE, 116, 1951, 4) Lenau; Proc. ASCE, J. Eng. Mech. Div., Vol. 105, 1979

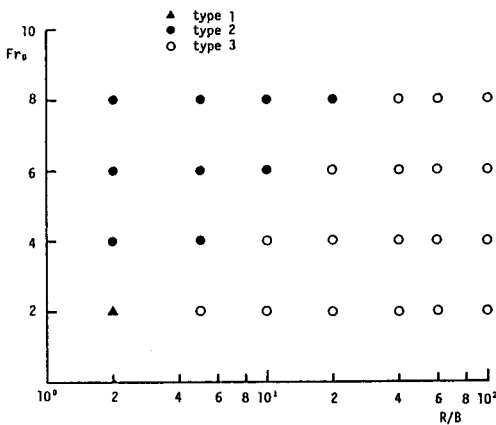


Fig.5 領域区分

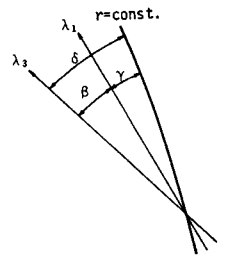


Fig.3

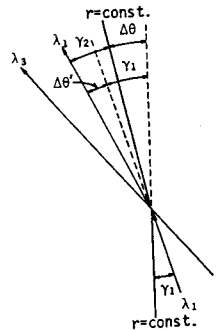


Fig.4

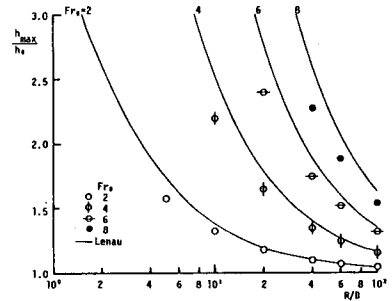


Fig.6 $h_{\max}$ と R/B の関係

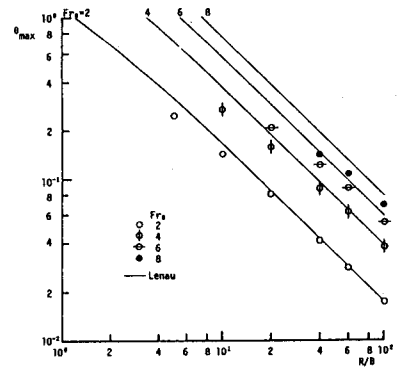


Fig.7 $\theta_{\max}$ と R/B の関係