II-328　重み付差分法による塩水くさびの拡散解析

東　和　大学　正員○空閑　幸雄
九州産業大学　正員　加納　正道
九州産業大学　正員　赤坂　順三

1．まえがき　我々は前報等[1),2)]において、移流拡散方程式および浸透流方程式の重み付差分法を提案し、移流拡散解析については厳密解との比較において精度が高いことを述べた。そこで本報では、被圧滞水層内での浸透流方程式の重み付差分法を示す。また、本報でとり上げた被圧滞水層内における塩水くさびの浸透と拡散問題例では無次元流速（F）や無次元拡散係数（μ）がかなり小さいので、このF、μの小さい範囲で、高い精度の解が得られる移流拡散方程式の重み付差分法とその結果の一部を示す。

2．基礎方程式　被圧飽和滞水層内の塩水くさびの浸透と拡散問題は定常浸透流方程式(1)および非定常移流拡散方程式(2)に支配される。

浸透流方程式　：
$$D_1\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}+D_2\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}+\frac{\partial}{\partial y}\left(D_2\frac{\rho}{\rho_f}\right)=0 \tag{1}$$

移流拡散方程式：
$$\frac{\partial c}{\partial t}=d_1\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}+d_2\frac{\partial^2 c}{\partial y^2}-u_1\frac{\partial c}{\partial x}-u_2\frac{\partial c}{\partial y} \tag{2}$$

ここにu_1，u_2：x，y方向の実流速、D_1，D_2：透水係数、H：圧力水頭、ρ_f：淡水の密度、ρ：流体の密度、ρ_S：塩水の密度、c：塩分濃度、d_1，d_2：x，y方向の拡散係数である。なお、密度ρと濃度cとの関係は、次式(3)で表わす。

$$\rho=\rho_f+(\rho_S-\rho_f)\cdot c \tag{3}$$

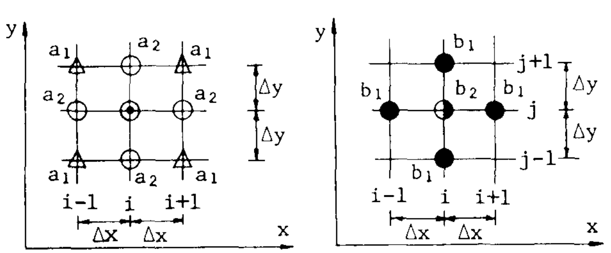
3．浸透流方程式のための重み付差分法　浸透流方程式(3)を重み付差分法で解析するにあたり、前報[1)]同様式(1)の左辺第３項は未知項Hを含まずHとは独立に求められる非同次項であるので、この項をfとおいて（即ち、$f=-\partial/\partial y\,(D_2\,\rho/\rho_f)$）、式(4)と表わす。

基礎式(4)を解析するための重み付差分法を定める目的で、まずf＝0とした同次形の重み付差分法を求める。そこで、同次方程式を満足するx，yの多項式は式(5)で表わされる。

$$D_1\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}+D_2\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}=f \tag{4}$$

$$H^{(r)}=\left(\frac{x^2}{D_1}\right)^r+\left(\frac{y^2}{D_2}\right)^r-(\delta_{r1}+1)\,(r+1)\,!\,\left(\frac{x^2y^2}{D_1D_2}\right)^{(r-1)\{H(r-1)\}}\quad (r=0,1,2) \tag{5}$$

ここに、H(r-1):Heavisideのステップ関数、δ_{r1}:Kroneckerのデルタである。いま、差分間隔$\Delta x=\Delta y=h$とし、原点のごく近くを考え$x=p_1h$，$y=p_2h$と離散化して、p_1，p_2は０，±１のような大きくない整数とする。さて、図１(a)に示す未知時間の３種類９点（a_1,a_2の付いた点と考える点）における差分モデルを考えると重み付差分式(6)が得られる。ここで、原点を考える点に移し、式(5)においてr＝０，２のときのHを求める式(6)に代入すれば連立方程式(7)が得られ、これを解けば重みa_1，a_2が得られる。



(a)Hの差分モデル　　(b)fの差分モデル

図１　非同次形浸透流差分モデル

⊙：考える点，○，△：未知点

◑，●：既知点

$$H(i,j)=a_1\{H(i-1,j-1)+h(i-1,j+1)+H(i+1,j-1)+H(i+1,j+1)\}+a_2\{H(i-1,j)+H(i,j-1)+H(i,j+1)+H(i+1,j)\} \tag{6}$$

さらに、非同次形の方程式(4)を解析する重み付差分法を求めるために、右辺をｘ，ｙの多項式（f_L（L=1,2,･･･M））におきかえて得られる式(4)の特殊解の一つをそれぞれH_Lとすれば、式(4)を満足するf_LとH_Lの組み合わせ式(8)が得られる。以下、同次形方程式同様離散化をほどこし、図１(a)と(b)に示す５種類１４点における差分モデルを考えれば、式(9)のように表わされる。次に、式(8)においてL=1,3として求めたH_L，f_Lの値および式(7)で求めたa_1，a_2を重み付差分式(9)に代入すれば、次の連立方程式(10)が求まり、これを解いてb_1，b_2の重みが求まる。

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4\left(\frac{1}{D_1^2}+\frac{1}{D_2^2}-\frac{6}{D_1D_2}\right) & 2\left(\frac{1}{D_1^2}+\frac{1}{D_2^2}\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

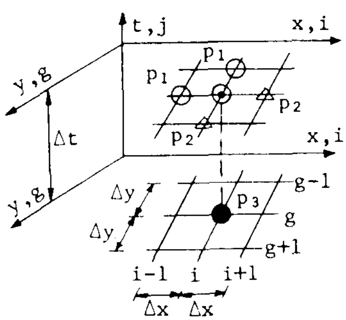
$$f_L=D_1x^{L-1}+D_2y^{L-1}, \quad H_L=\frac{x^{L+1}+y^{L+1}}{L(L+1)} \quad (L=1,2,3,....) \quad (8)$$

$$H(i,j)=a_1\{H(i-1,j-1)+H(i-1,j+1)+H(i+1,j-1)+H(i+1,j+1)\}+a_2\{H(i-1,j)+H(i,j-1)+H(i,j+1)+H(i+1,j)\}+b_1\{f(i-1,j)+f(i,j-1)+f(i,j+1)+f(i+1,j)\}+b_2\cdot f(i,j) \quad (9)$$

__４．移流拡散方程式のための重み付差分法__　Ｆ，μがかなり小さい場合の移流拡散方程式の重み付差分法を求めてみよう。まず、式(2) を満足するｘ，ｙの多項式は式(11)で表わされる。ここで、ｘ，ｙ，ｔの増分をΔｘ＝Δｙ＝ｈ，Δｔ＝ｋとし、浸透流方程式同様離散化をほどこし、図２に示す様な３種類５点で差分モデルを考える場合には差分式は、次式(12)で示される。次に原点をp_3の付いた点に移し、式(11)においてr=0,1,2を代入して得られるｃの値を式(12)に代入すれば、連立方程式(13)が得られる。なお、$F_*=F_x+F_y$，$\mu_*=\mu_x+\mu_y$はそれぞれ 無次元化した二次元流速および二次元拡散係数である。これを解けば重み付差分法の重みp_1,p_2,p_3 が求まる。次に、F_*,μ_*のかなり小さく、セルペクレー数（＝F_*／μ_*）が大きい範囲におけるため重み付差分法の精度の検証を式(14)の理論解と比較して行った。結果の一部を図３に示す。この結果、図２の重み付差分モデルを用いればF_*，μ_*がかなり小さくセルペクレー数が大きい箇所でも精度よく解析できることが分かった。

$$\frac{h^2}{3}\begin{bmatrix} 12 & 6 \\ 2h^2 & h^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 4(D_1+D_2) & (D_1+D_2) \\ 2h^2(D_1+D_2) & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$c^{(r)}(x,y,t)=\sum_{i=0}^{r/2}\left[\frac{\{(x-v_1t)+(y-v_2t)\}^{r-2i}}{(r-2i)!}+\frac{\{(d_1+d_2)\,t)\}^{i}}{i!}\right] \quad (11)$$



$$c(i,g,j)=p_1\{c(i-1,g,j+1)+c(i,g-1,j+1)\}+p_2\{c(i,g+1,j+1)+c(i+1,g,j+1)\}+p_3\{c(i,g,j)\}\cdots\cdots(12)$$

⊙：考える点

○
△：未知点　，　●：既知点

図２ 移流拡散差分モデル

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2(-1-F_*) & 2(1-F_*) & 0 \\ (-1-F_*)+2\mu_* & (1-F_*)+2\mu_* & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -F_* \\ 1/2(-F_*^2+\mu_*) \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$c(x,y,t)=\frac{M}{4\pi dt\sqrt{K_x K_y}}\ \mathrm{EXP}\left[-\frac{1}{4t}\left\{\frac{(x-v_1t)^2}{K_x}+\frac{(y-v_2t)^2}{K_y}\right\}\right] \quad (14)$$

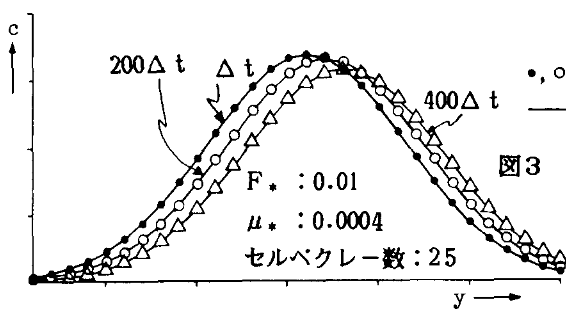


図３　移流拡散解析結果

参考文献

１）加納・空閑・赤坂・細川：淡塩境界面の移流拡散解析、61年度西部支部年講

２）加納・空閑・赤坂：不規則境界をもつ二次元上流重み付差分法、第41回年講第２部