II-327　移流拡散問題の高精度の計算解法について

佐賀大学理工学部　正　大串　浩一郎　　九州大学工学部　正　小松　利光
九州大学大学院　学　朝位　孝二　　PSコンクリート㈱　正　小永吉　秀男

1．まえがき　移流の計算精度において従来の計算法と比較して飛躍的な改善を得たHolly-Preissmann法は、計算の容易さの点ではなお煩雑なものがあった。小松・仲敷・大串らが提案した6-Point Methodでは、HP法の欠点が十分補われ、２次元問題への拡張も容易なことが示された。本研究は、6-Point Methodのさらなる精度の向上を目指し、また、使用する点をさらに減じた4-Point Methodにおいても高い精度で計算できる可能性を示唆するものである。

2．6-Point MethodのTaylor級数解析　移流方程式において流速Uを一定とおけば、次式が得られる。

$$\frac{\partial^K C}{\partial t^K} = (-U)^K \cdot \frac{\partial^K C}{\partial x^K} \quad (K=1,2,3,\cdots) \qquad (1)$$

ただし、C（x，t）はK回微分可能な関数とする。6-Point Methodのスキームを時間、及び空間についてTaylor級数解析を行なう際、(1)式を用いれば次のようになる。

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U\frac{\partial C}{\partial x} = D_2\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D_3\frac{\partial^3 C}{\partial x^3} + D_4\frac{\partial^4 C}{\partial x^4} + \cdots \qquad (2)$$

ただし、$D_n(n=2,3,4,\cdots)$はクーラン数$\alpha = U\Delta t/\Delta x$の関数で、以後n次の拡散係数と呼ぶことにする。本来は、移流方程式

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U\frac{\partial C}{\partial x} = 0 \qquad (3)$$

を計算しなければならないにもかかわらず、(2)式の右辺のような numerical diffusionの項が加わるのは全てそのスキームに原因がある。

3．6-Point Methodの補正　数値的拡散項、すなわち(2)式の右辺を全てゼロにできるスキームがもし存在するのであれば、その計算解は厳密解と一致する。しかし、数値的拡散項は無限に続く項であるから、全てをゼロにするのはほとんど不可能である。

そこで、いくつかの項だけを用いて近似的に(2)式の右辺を表現することを考える。試みに２次、３次、４次のどれか１つだけを用いて負の拡散の計算を行なうと、それぞれ増幅、位相のずれ、振動といった特徴が顕著に現われ、単純な近似では(2)式の右辺を表わすことは難しいことが分かった。また、２次、２次＋３次、２次＋３次＋４次といった組み合わせで負の拡散を試みてもあまりよい結果は得られなかった。

ところで、２次の拡散項はD_2が正の場合ピーク濃度の減衰を生じ、D_2が負の場合ピーク濃度の増幅を生じる。本研究では、この性質を利用し濃度分布の場所ごとの変化に対応してD_2の正負を変化させ、6-Point Methodの誤差を軽減する方法を考えた。先程述べたように２次、３次、４次といった拡散項は複雑な挙動を示すので、それらの特徴を考慮した２次の拡散項を次のように考える。

$$D_2'\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = -\frac{\dfrac{\partial C}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial^2 C}{\partial x^2}\cdot\dfrac{\partial^3 C}{\partial x^3}\cdot\dfrac{\partial^4 C}{\partial x^4}}{\left|\dfrac{\partial C}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial^2 C}{\partial x^2}\cdot\dfrac{\partial^3 C}{\partial x^3}\cdot\dfrac{\partial^4 C}{\partial x^4}\right|}\cdot D_2\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$$
$$= -\ \delta\cdot D_2\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \qquad (4)$$

すなわち、微係数の大きさは２次の項のみを用い、拡散係数の正負の判断は１次～４次の微係数で行なう。(4)式を用いると6-point memthod は次のように書き換えられる。

$$C_i^{n+1}=A_1C_{i-3}^n+A_2C_{i-2}^n+A_3C_{i-1}^n+A_4C_i^n+A_5C_{i+1}^n+A_6C_{i+2}^n-D_2'\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad (5)$$

ここで、D_2'における１次～４次の微係数は次式のような差分で計算する。

$$\frac{\partial C}{\partial x}=\frac{C_{i+1}-C_{i-1}}{2\Delta x},\quad \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}=\frac{C_{i+1}-2C_i+C_{i-1}}{(\Delta x)^2} \quad (6)$$

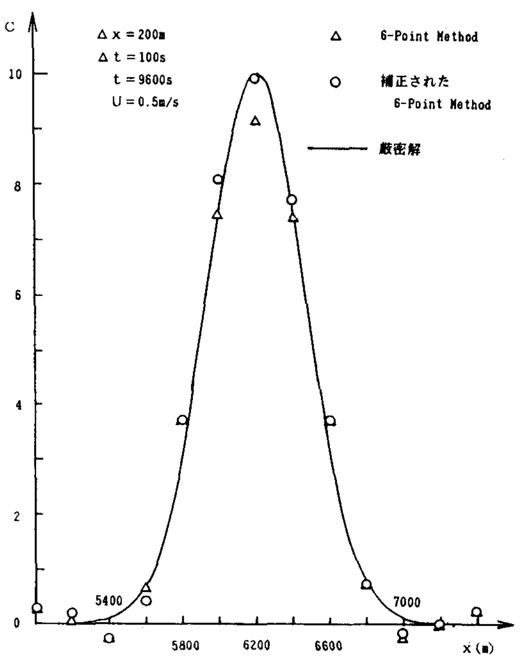
$$\frac{\partial^3 C}{\partial x^3}=\frac{C_{i+2}-2C_{i+1}+2C_i-C_{i-1}}{2(\Delta x)^3},\quad \frac{\partial^4 C}{\partial x^4}=\frac{C_{i+2}-4C_{i+1}+6C_i-4C_{i-1}+C_{i-2}}{(\Delta x)^4}$$

また、D_2'に掛かっている$\partial^2C/\partial x^2$は精度向上のため次式で計算するようにする。

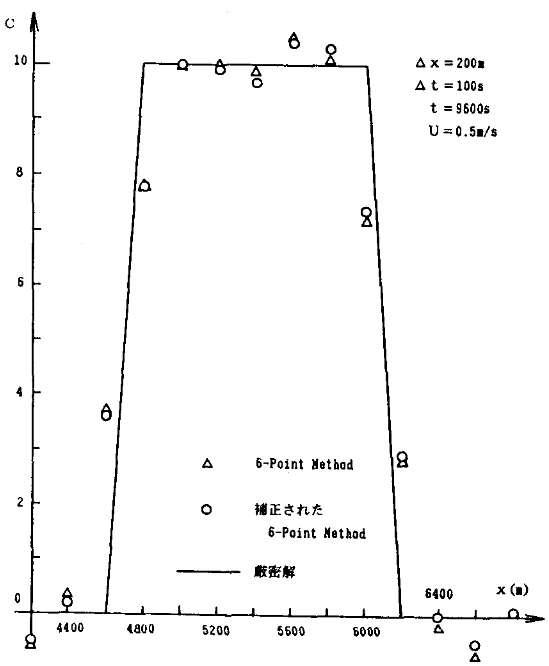
$$\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}=(1-\alpha)\frac{C_{i+1}-2C_i+C_{i-1}}{(\Delta x)^2}+\alpha\frac{C_i-2C_{i-1}+C_{i-2}}{(\Delta x)^2} \quad (7)$$

４．純粋移流のモデル計算　(5)式を用いて純粋移流の計算を行なった。初期条件の濃度分布がGauss型濃度分布の場合の計算結果が図－１である。また、初期条件が台形分布の結果が図－２である。補正を行なう前の6-Point Methodと比較してみると、図－１のGauss型濃度分布の場合はピークの濃度のダンピングが少なく非常に改善されているといえる。また、図－２では、6-Point Methodと精度の上でそれほどの差異は認められないが、これは台形分布における濃度勾配が局所的には急変するが、全体的にそれほど変化しないからであると思われる。

５．結論　Taylor級数解析より出てくる誤差項を(4)式のように評価することで、ほとんどダンピング誤差がなくなった。この補正の方法を4-Point Methodに適用すれば、精度のよい、コンパクトなスキームが開発される可能性は大きいと思われる。



図－１　Gauss型濃度分布の計算結果



図－２　台形濃度分布の計算結果