II-318　開境界条件を考慮した浅海長波方程式の有限要素法解析

佐藤工業　株式会社　正　員○児玉　敏雄
中央大学　理工学部　学生員　木下　勝尊
中央大学　理工学部　正　員　川原　睦人

１．はじめに

差分法や有限要素法で津波の解析を行う場合、解析領域は陸岸境界と外海に人為的に設けた開境界によって設定される。一般に深海域の解析では、陸岸では完全反射の条件を与え、開境界では進行波の条件を満足する境界条件を与えている。著者らは開境界に対して線形な浅海長波方程式の一般解を接続する方法を提案している[1]。この方法は、開境界において、無限級数で表される一般解の１項のみを採用し、１方向の波向きを持つ波の連続性を保持する方法である。したがって、波が開境界を通過する際の波数および波向きが明確になっている場合には非常に有効であると思われる。しかし、波源の形状が複雑になる場合や、領域内に島などがあり波が開境界を通過する際の波向きが不明確である場合には不都合が生じると考えられる。本報では、浅海長波方程式の一般解を複数項採用することにより任意の波の通過を許容する開境界条件の処理方法について報告する。

２．基礎方程式

基礎方程式には、線形な浅海長波方程式を流速ｕに対して波速Ｃ、水位ηに対して重力加速度gで変数変換した運動方程式と連続の式を用いる。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + C\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad \cdots\cdots (1) \qquad \frac{\partial v}{\partial t} + C\frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \quad \cdots\cdots (2) \qquad \frac{\partial \psi}{\partial t} + C\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0 \quad \cdots\cdots (3)$$

開境界の連続条件は、流速，水位上昇に対してそれぞれ以下のようになる。

$$u-\bar{u}=0,\ v-\bar{v}=0,\ \psi-\bar{\psi}=0 \qquad \text{on } \Gamma c\ (\text{開境界}) \quad \cdots\cdots (4)$$

ここで、￣付きは一般解であることを意味する。

３．一般解

流速および水位の一般解を次式のように選ぶ。ただし、一般解の展開項数は３項とする。

$$\begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{\psi} \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^{3} \psi_0^n \begin{Bmatrix} Ckx^n/\omega^n \\ Cky^n/\omega^n \\ 1 \end{Bmatrix} e^{-i\omega^n t} e^{i(kx^n x+ky^n y)} \quad \cdots\cdots (5)$$

ここで、ψ_0は未定定数，ｋは波数，ωは角振動数である。

４．有限要素方程式

内部領域の流速，水位を一次の三角形要素で離散化する。また、基礎方程式(1)，(2)の第２項および(3)式の第２，３項を部分積分して得られる境界積分項に対して(4)，(5)式を適用することにより有限要素方程式が導かれる。

$$M_{\alpha\beta}\dot{u}_\beta - H_{\alpha x\beta}\psi_\beta + S_{\alpha\mu}{}^{u}W_{\mu\lambda}{}^{-1}T_{\lambda\gamma}w_\gamma = 0 \quad \cdots\cdots (6)$$
$$M_{\alpha\beta}\dot{v}_\beta - H_{\alpha y\beta}\psi_\beta + S_{\alpha\mu}{}^{v}W_{\mu\lambda}{}^{-1}T_{\lambda\gamma}w_\gamma = 0 \quad \cdots\cdots (7)$$
$$M_{\alpha\beta}\dot{\psi}_\beta - H_{\alpha x\beta}u_\beta - H_{\alpha y\beta}v_\beta + S_{\alpha\mu}{}^{\psi}W_{\mu\lambda}{}^{-1}T_{\lambda\gamma}w_\gamma = 0 \quad \cdots\cdots (8)$$

ここで、Ｍ，Ｈ，Ｓ，Ｗ，Ｔは係数マトリックスであり、ｕ，ｖは流速，ψは水位上昇量を表す。また、ｗはｗ＝（ｕ，ｖ，ψ）^{T}である。(6),(7),(8) 式に２段階ラックスウエンドロフ法を適用し、計算を行う。

５．数値計算例

(1) 進行波のシミュレーション；本手法の検証のため、長方形水路モデルによる一次元進行波の伝播解析を行う。モデルの要素分割を図－１に示す。境界条件は、境界$\overline{AB}$で周期T=1 秒，波高A=0.1mのsin 波を入力し

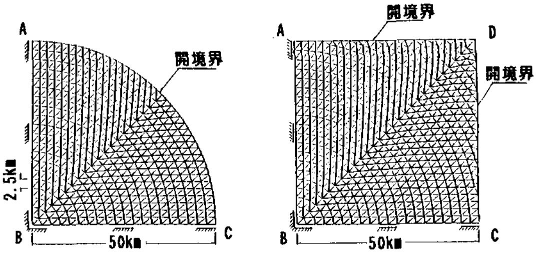
開境界$\overline{CD}$では一般解（展開項数N=3)を接続する。また、境界$\overline{AD}$および$\overline{BC}$では法線方向流速を零とする。計算は水深を変化させた３つの場合について行った。図－２に計算結果を示す。水深が一定の場合の波高は解析解と良く一致している。水深が深くなる場合は、開境界付近の波高は解析解より若干小さくなっているが水深が浅くなる場合は逆に大きくなっていることがわかる。

(2) 津波モデルのシミュレーション；海底地盤の変動が円形で瞬時に起こった場合を想定し、津波の伝播解析を行った。図－３に解析領域が円形および四角形の場合の有限要素分割図を示す。初期条件としてB 点を中心に半径25kmの範囲で初期水位を 1.0m 与えることとする。図－４に24分後の波高分布を示す。解析領域が円形の場合と四角形の場合の波高分布はほぼ一致している。この結果から、本手法では開境界の形状の影響を受けずに計算が可能であることがわかる。図－５に解析領域が円形の場合の波高の鳥瞰図を示す。この図からも波が開境界を通過していくようすがわかる。

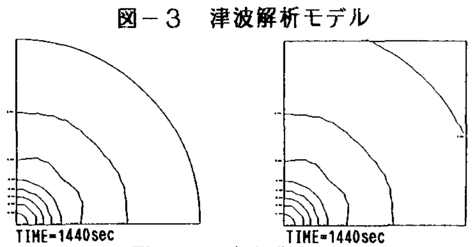
６．おわりに

開境界において、浅海長波方程式の一般解を３項接続する方法を示した。本手法を一次元進行波の伝播解析に適用した結果、解析解と良い一致を示した。また、本手法を津波のモデル解析に適用した結果、開境界の形状の影響を受けずに計算が可能であることがわかった。今後本手法を実際問題に適用していく考えである。

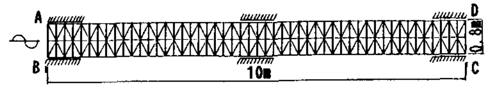
参考文献1)木下，川原：外部領域の一般解を接続した有限要素法による浅水長波流れの解析，第７回流体力学における数値解析法シンポジウム報文集pp.79 ～84，1986.



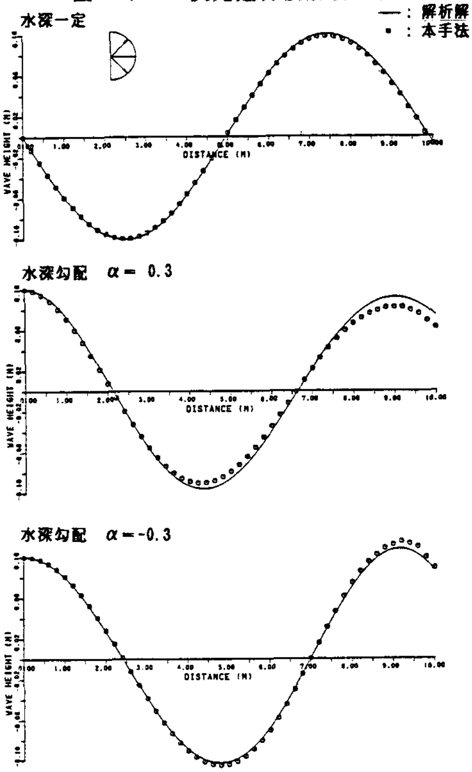
図－３　津波解析モデル



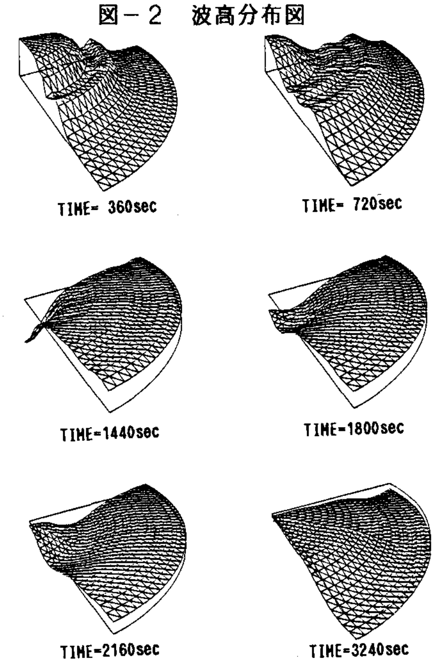
図－４　波高分布図



図－１　一次元進行波解析モデル



図－２　波高分布図



図－５　波高の鳥瞰図