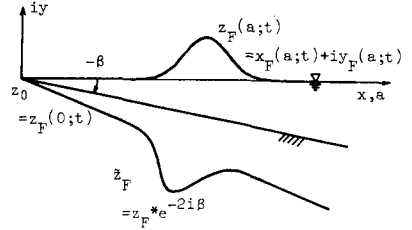


II-224 複素速度ポテンシャルを用いた水面波の数値計算

東北大学工学部 正員 ○ 長尾昌朋
 東北大学工学部 正員 京藤敏達
 東北大学工学部 正員 首藤伸夫

1. はじめに

複素速度ポテンシャルを用いた碎波を含む波の変形の数値計算は、数多くなされているが、周期的な底面において周期的な波を想定しているものが多い。ここでは、汀線での条件を考慮し、鏡像を重ね合わせるにより、一様勾配斜面上の碎波の数値計算を試みた。



2. 基礎方程式および数値計算法

ここで用いる座標系および記号を図-1に示す。水表面の鏡像は(1)と表され、これによる複素速度ポテンシャルの鏡像を重ね合

図-1

$$\tilde{z}_F = z_F^* e^{-2i\beta} \dots\dots\dots (1)$$

$$W(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty \frac{\mu_F'}{z - z_F'} \cdot \frac{\partial z_F'}{\partial a'} da' - \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty \frac{\mu_F'}{z - z_F^* e^{-2i\beta}} e^{-2i\beta} \frac{\partial z_F^*}{\partial a'} da' \dots\dots\dots (2)$$

$$\frac{\partial z_F}{\partial t} = \left(\frac{\partial W}{\partial z} \right)^* \text{ on } z = z_F \dots\dots\dots (3)$$

$$\text{Re} \left[\frac{\partial W}{\partial t} \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial W}{\partial z} \left(\frac{\partial W}{\partial z} \right)^* + g y_F = f(t) \text{ on } z = z_F \dots\dots\dots (4)$$

$$\left(\frac{\partial z_F}{\partial t} \right)^* = \frac{1}{2} \frac{\partial \mu_F}{\partial a} \frac{\partial z_F}{\partial a} + \frac{1}{2\pi i} v \cdot p \cdot \int_0^\infty \frac{1}{z_F - z_F'} \cdot \frac{\partial \mu_F'}{\partial a'} da' - \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty \frac{1}{z_F - z_F^* e^{-2i\beta}} \cdot \frac{\partial \mu_F'}{\partial a'} da' \dots (5)$$

$$\left(\frac{\partial z_0}{\partial t} \right)^* = \frac{\pi - \beta - \arg \left(\frac{\partial z_0}{\partial a} \right)}{\pi} e^{i\beta} \frac{\partial \mu_0}{\partial a} \text{Re} \left[e^{-i\beta} \frac{\partial z_0}{\partial a} \right] + 2e^{i\beta} \text{Re} \left[e^{-i\beta} \frac{1}{2\pi i} v \cdot p \cdot \int_0^\infty \frac{1}{z_0 - z_F'} \cdot \frac{\partial \mu_F'}{\partial a'} da' \right] \dots\dots\dots (6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu_F}{\partial t} &= \frac{\partial \mu_F}{\partial a} \text{Re} \left[\frac{\partial z_F}{\partial t} \frac{\partial z_F}{\partial a} \right] - 2 \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial z_F}{\partial t} \left(\frac{\partial z_F}{\partial t} \right)^* + g y_F - f(t) \right. \\ &+ \text{Re} \left[\frac{1}{2\pi i} v \cdot p \cdot \int_0^\infty \frac{1}{z_F - z_F'} \left(\frac{\partial \mu_F'}{\partial t} \frac{\partial z_F'}{\partial a'} - \frac{\partial \mu_F'}{\partial a'} \frac{\partial z_F'}{\partial t} \right) da' \right] \\ &+ \left. \text{Re} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty \frac{1}{z_F - z_F^* e^{-2i\beta}} e^{-2i\beta} \left(\frac{\partial \mu_F'}{\partial t} \frac{\partial z_F^*}{\partial a'} - \frac{\partial \mu_F'}{\partial a'} \frac{\partial z_F^*}{\partial t} \right) da' \right] \right\} \dots\dots\dots (7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu_0}{\partial t} &= \frac{\partial \mu_0}{\partial a} \text{Re} \left[\frac{\partial z_0}{\partial t} \frac{\partial z_0}{\partial a} \right] - \frac{\pi}{\pi - \beta - \arg \left(\frac{\partial z_0}{\partial a} \right)} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial z_0}{\partial t} \left(\frac{\partial z_0}{\partial t} \right)^* + g y_0 - f(t) \right. \\ &+ \left. 2 \text{Re} \left[\frac{1}{2\pi i} v \cdot p \cdot \int_0^\infty \frac{1}{z_F - z_F'} \left(\frac{\partial \mu_F'}{\partial t} \frac{\partial z_F'}{\partial a'} - \frac{\partial \mu_F'}{\partial a'} \frac{\partial z_F'}{\partial t} \right) da' \right] \right\} \dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

$$v \cdot p \cdot \int_0^\infty \frac{g' da'}{z_F - z_F'} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_0^{a-\epsilon} \frac{g' da'}{z_F - z_F'} + \int_{a+\epsilon}^\infty \frac{g' da'}{z_F - z_F'} \right] \dots\dots\dots (9)$$

わせることにより底面での境界条件を満たす。水表面をLagrange的に取り扱おうと流体内部における複素速度ポテンシャルは(2)となる。ここで、 μ_F は水表面での渦度の強さ、 ψ のついた関数は積分変数の関数である。水表面での境界条件には Euler-Lagrange関係式(3)とBernoulliの式(4)を用いる。ここで、 $f(t)$ は無遠慮で左辺が0となるように決める。(2)~(4)から Z_F 、 μ_F の発展式を導くと(5)~(8)となる。ここで、特異点を含む積分は(9)で定義され、Cauchyの主値と呼ばれる。数値計算は中央差分とし、陰解法を使用して各時間ステップ毎の Z_F 、 μ_F を解く。 Z_F 、 μ_F は渦の位置、強さなので同じ計算点に配置する。

表-1

差分格子	Δa	0.05	m
	Δt	1/200	sec
初期条件	x_F	$a-4 \int y_F da$	m
	y_F	$0.1 \exp\{-(a-5)^2\}$	m
	μ_F	0	m ² /s
底面勾配	β	$\tan^{-1}0.05$	

3. 計算結果

表-1に差分格子、初期条件、底面勾配を示す。これは、初期水位のみを与えた場合に相当する。計算結果を50ステップ毎の波形として図-2に示す。途中で水面に振動を生じ、やがて増大して収束条件を満たさなくなる。この原因を調べるために図-3に200~280ステップの隣合う2個の計算点の距離と x_F-a を示す。振動は隣合う計算点の距離が最小となる所から生じている。これは、今回用いた方程式の特徴で、計算誤差が距離の逆数で影響するためである。この振動を無くするためには計算を高精度にする方法、表面張力を考慮する方法等があるが、ここではスムージングを用いた。計算に用いた波は非常になだらかなので隣合う計算点の水平距離が最小、つまり x_F-a の勾配が負で最大となる所から振動が始まるとも言える。そこで x_F を時間ステップ毎にスムージングした。その結果を図-6に示す。砕波には至らないが斜面上での波の変形を良く再現していると考えられる。

4. おわりに

複素速度ポテンシャルを用いて砕波変形を再現する方程式を導いた。計算法に問題があり、今後解決しなければならない。

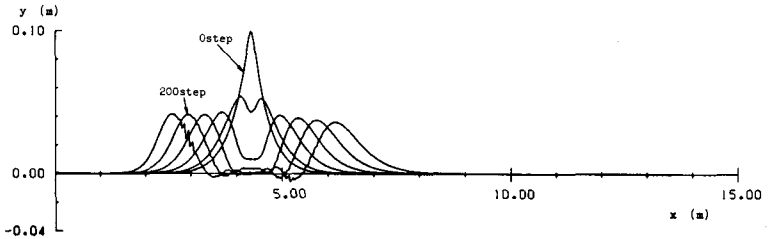


図-2

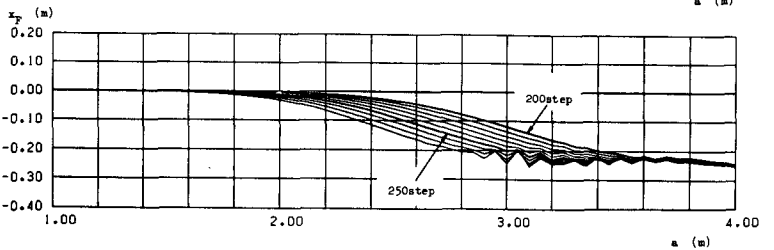
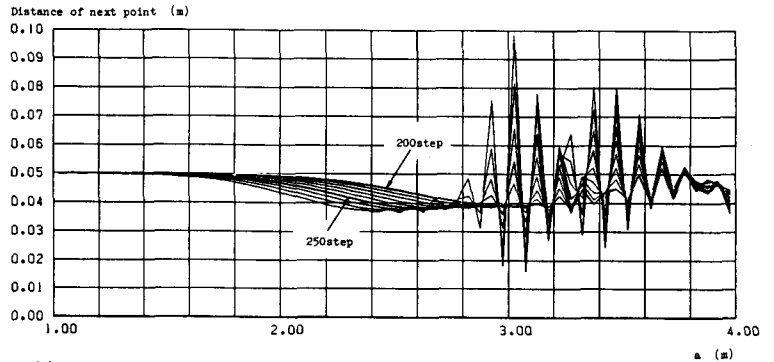


図-3

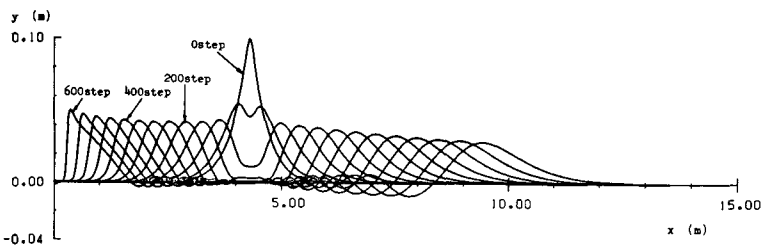


図-4