II-157　貯水池結氷板の熱応力解析

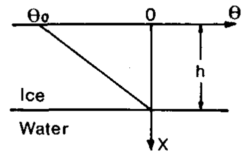
北見工業大学　正員　佐渡公明

1．まえがき

寒冷地の貯水池が結氷してできる結氷板は，温度上昇があるとダム本体やゲートに熱応力を作用する。わが国ではこの熱応力は，波浪による力よりは小さいと考えられダムの安定計算に算入されていない[1)]。しかし，氷板熱応力については，氷の構成方程式，両岸の拘束度，クラックなど未解決の問題点が多々あるのである。ここでは，氷板表面の温度変化から氷板内の温度を求め，その温度変化から熱応力を計算する方法を述べ，次に若干の数値計算例を示す。

2．氷温計算

座標軸を図－1のように定めると，氷板内温度 $\theta(x, t)$ は，式 (1) の1次元熱伝導方程式を解いて得られる。初期条件は，氷板表面温度 θ_0 と氷板下面温度 0 ℃を直線で結んだ式 (2) を考える。



図－1

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = k\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} \cdots\cdots(1) \qquad \theta(x, 0) = -\frac{\theta_0}{h}x + \theta_0 \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

ここにkは熱拡散率，hは氷厚である。境界条件としては，氷板下面で 0 ℃であり，氷板表面の温度は Δt 時間ごとに一定値をとる階段状変化に近似すると，それぞれ式 (3)，(4) となる。

$$\theta(h, t) = 0 \cdots\cdots(3) \qquad \theta(0, t) = \bar{\theta}_m,\quad (m-1)\Delta t \leqq t \leqq m\Delta t\ (m=1, 2\cdots\cdots) \cdots\cdots\cdots(4)$$

以上の初期条件 (2)，境界条件 (3)，(4)のもとに式 (1) を解くと，次式 (5) の解が得られる。

$$\begin{aligned}\theta(x, K\Delta t) =& \frac{2\theta_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi x}{h}\exp(-K\beta n^2) \\ &+\frac{2}{\pi}\sum_{i=1}^{K-1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi x}{h}\left[\exp\{-(K-i)\beta n^2\}-\exp\{-(K-i+1)\beta n^2\}\right]\bar{\theta}_i \\ &-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi x}{h}\exp(-\beta n^2)\,\bar{\theta}_K + \left(1-\frac{x}{h}\right)\bar{\theta}_K \cdots\cdots(5)\end{aligned}$$

$K=2, 3, \cdots\cdots$　$\beta = k\pi^2\Delta t/h^2$　$K=1$ のときは式(5)の第2項を省けばよい。

3．熱応力計算

まず，氷の応力－ひずみ関係式は線形のスプリングと非線形のダッシュポットを直列につないだ式(6)のBergdahl[2)] のモデルを考える。

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{E}\frac{d\sigma}{dt} + LD\sigma^n \cdots\cdots\cdots(6)$$

$E = 6.1(1-C\theta)\ \mathrm{GP_a}$，　$C = 0.012\ 1/℃$

$D = D_0\exp(-Q/RT)$，　$D_0 = 9.13\times10^{-4}\ m^2/s$

σ：応力，ε：ひずみ，t：時間，　$Q = 59.8\ \mathrm{kJ/mol}$，　$R = 8.31\ \mathrm{J/mol\cdot K}$

E：弾性係数，D：拡散係数　　$L = 4.4\times10^{-16}\ 1/m^2\cdot \mathrm{Pa}^n$，$n = 3.651$，T：$\theta$の絶対温度

式 (6) は，$n \fallingdotseq 1$ のために非線形方程式となっているが，差分法を用いると式 (7) になる。

$$\sigma_2 = \sigma_1 + \bar{E}\left[\Delta\varepsilon - (D_1 L\sigma_1^{\,n} + D_2 L\sigma_2^{\,n})\frac{\Delta t}{2}\right]\cdots\cdots(7)$$

添字1：時刻 $(K-1)\Delta t$

添字2：時刻 $K\Delta t$

ここに，$\bar{E}$は Δt 間の平均弾性係数，$\Delta\varepsilon$はΔt 間のひずみ変化量である。

氷板の熱膨張によるひずみ増加量は，線膨張係数αを用いて式(8)で表わされる。

$$\Delta\varepsilon = N(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) = N\alpha(\theta_2 - \theta_1) \quad \cdots\cdots\cdots(8)$$

N：拘束係数，$\alpha = (54.0 + 0.18\theta) \times 10^{-6}$ $(1/^\circ C)$[3]，$\theta = (\theta_1 + \theta_2)/2$

結局，氷板内の任意の位置においてΔt時間ごとに氷温を式(5)より求め，式(8)よりひずみ増加量が得られ，これを式(7)に代入してNewton法などにより熱応力σ_2が求められる。このσ_2を氷厚方向に積分すれば，氷板の単位幅当りの氷圧力が得られる。

4．数値計算例

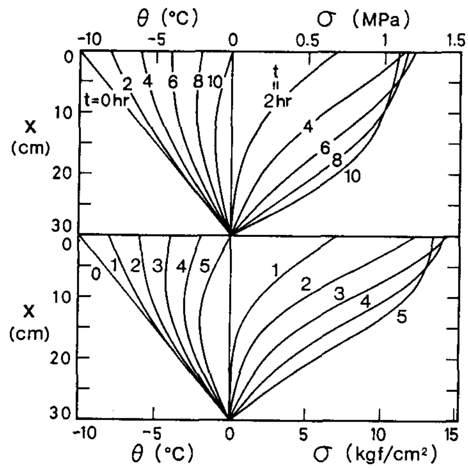
氷板熱応力の基本的特性を調べるために，次の条件で氷温，熱応力の計算を行う。

$h = 30cm$，$\theta_0 = -10^\circ C$，$k = 0.0115\ cm^2/s$，

表面温度変化$\Delta\theta_0/\Delta t = 1,\ 2,\ 3\ (^\circ C/hr)$

拘束係数は$N=1$として，熱膨張が両岸で完全に拘束されるものとする。

以上の計算結果を示したのが図－２である。tは初期時刻からの経過時間で，初期応力は０としている。氷温上昇に対応して，熱応力が増加している様子がよく分かる。表面温度変化が速くなると，氷温増加の応答が鈍くなり温度分布に極小値が生じている。また各深さの熱応力の増加量は，時間の経過とともに小さくなり，表面付近ではついに減少している。これは，応力が大きくなるにつれて塑性の影響（式(6)の第２項）が効いてきて，応力緩和になるからである。



図－２　氷温分布と熱応力分布
（上段，下段の図の$\Delta\theta_0/\Delta t$は１，２℃／hr）

式(6)で$n=1$とおけばMaxwell物体になるが，ひずみが大きくなるにつれBergdahlに比べMaxwellモデルの応力が大きくなる。例えば図－２の上半分の場合，熱応力を積分して堤幅方向１m当りの氷圧力F（t／m）を求めると右表のようになる。

Tim (hr)		2	4	6	8	10
F	Bergdahl	6.14	13.73	19.21	22.10	23.33
(t/m)	Maxwell	6.20	14.96	24.68	34.71	44.80

5．あとがき

結氷板の熱応力解析について述べたが，実際のダムに適用するには拘束係数をどう見積るかが難かしい。常呂川水系の富里ダムおよび屈斜路湖において熱応力の実測をしているが，最大値はそれぞれ６，４kgf/cm^2と得られるている。現地測定の結果では，氷板上の積雪による氷温変化の抑制が熱応力に最も影響するようである。氷板の破壊条件を入れて，屈斜路湖の御神渡りの再現計算もしてみたい。

参考文献

1）日本大ダム会議：ダム設計基準，日本大ダム会議，1978．
2）L. Bergdahl：Thermal Ice Pressure in Lake Ice Covers，Chalmers Univ.，Sweden，1978.
3）B.Michel：Ice Mechanics，Les Presses de l'Universite Laval，1978.
4）佐渡公明：地表面伝熱量の実用的算定法，土木学会北海道支部論文報告集，1985．