

## II-96 透水量係数の空間分布推定について

室蘭工業大学 正員 藤間 聡  
(株)土木技術コンサルタント 正員 谷口 直弘

## 1. まえがき

地下水資源の有効利用および水質保全対策を講ずるには、自然的、人為的要因による地下水応答を合理的かつ的確に予測することが重要である。このため地下水流動方程式のパラメータである透水係数、透水量係数、貯留係数等の正確な算定法の確立が必要となる。本報は逆問題として帯水層パラメータの一つである透水量係数の空間分布を限られた地下水位観測値から推定する方法を示すものである。

## 2. 透水量係数の推定

2-1. 解析対象帯水層の概要 解析対象地域は北海道中央部に位置する旭川市街を貫流する石狩川水系牛朱別川の下流部左岸域で、東西約1.20km、南北約0.50kmの不圧帯水層であり、牛朱別川からの浸出水により十分涵養がなされている。この帯水層の地質は第四紀沖積層の氾濫原から構成されており、その主体は砂礫層で地表面下1m以深に分布している。地下水位の変動はこの地域に不規則に配置された16個所の井戸において一日一回定時観測されており、その期間は1984年3月11日から1985年3月31日までの一年間である。本報では、1985年1月1日から同年3月1日までの冬期間連続60日の観測値を用いて透水量係数の空間分布を推定する。

2-2. 地下水位の平滑推定 地下水位観測値から帯水層パラメータを求める逆問題において、観測値に誤差が含まれると、同定すべきパラメータは最適値に収束せず、ときには物理的に容認できない負値をとるなど信頼性の低い結果を得ることになる。従って、本報においては次式で示されるカルマン・フィルター理論の固定区間スムージング法を適用して地下水位の平滑推定値を求め、以後の解析の観測値として用いることとする。

$$h_{t/N} = h_{t/t} + C_t [h_{t+1/N} - h_{t+1/t}], \quad (t = N-1, \dots, 0) \quad \dots(1)$$

$$C_t = P_{t/t} (P_{t+1/t} + Q)^{-1}, \quad P_{t/N} = P_{t/t} + C_t^2 [P_{t+1/N} - P_{t+1/t}]$$

ここに、 $h_{t+1/t}$ ,  $h_{t/t}$ はカルマン・フィルターによる地下水位推定値、 $P_{t+1/t}$ ,  $P_{t/t}$ は同じく推定誤差共分散、 $C_t$ は平滑ゲイン、 $Q$ は地下水流動方程式のモデル化に伴う誤差の分散、 $N$ は観測日数をそれぞれ示す。

2-3. 任意地点の地下水位の推定 前節の方法により観測誤差の処理を行なった後、トレンドを除いた変動量を確率変数として考え、非観測地点の地下水位を統計的手法を用いて推定する。この手法を適用する場合、一般に確率変数の統計的性質のうち平均、分散を一定とする弱定常過程を仮定することが多い。しかし、自然状態における地下水位の分散は解析領域が広範囲になるに伴い大きくなる傾向を示し、この過程は厳密には成立しないことになる。本報では確率変数の分散を一定とする代わりに、弱定常過程の成立条件を緩和すると共に実際の状態をより正確に表現すると考えられるDelhommeが提示したバリオグラム法<sup>2)</sup>を導入する。これは次式で示される距離 $d$ はなれた二点間の地下水位の差の分散が移動に際し不変とするものである。

$$\gamma(d) = 1/2 \cdot E[(h(X+d) - h(X))^2] \quad \dots(2)$$

ここに、 $\gamma(d)$ はバリオグラム、 $h(x)$ ,  $h(X+d)$ は、地点 $X$ ,  $X+d$ の地下水位平滑推定値、 $E$ は期待値を示す。任意の非観測地点における地下水位は、次式で示される線形回帰式により推定を行なう。

$$h^*(X_0) = \sum \lambda_i h(X_i), \quad (i = 1, \dots, n) \quad \dots(3)$$

ここに、 $h^*$ は非観測地点 $X_0$ における地下水位推定値、 $h$ は観測地点 $X_i$ の地下水位、 $n$ は観測地点の総数を示す。また、 $\lambda$ は重み係数であり、(3)式が不偏最良推定となるため $\lambda$ は次式を満足しなければならない。

$$\sum \lambda_i \gamma(X_i - X_j) + \mu = \gamma(X_i - X_0), \quad \sum \lambda_i = 1, \quad (i, j = 1, \dots, n) \quad \dots(4)$$

ここに、 $X_0$ は推定地点の位置座標値、 $X_i$ ,  $X_j$ は観測地点の位置座標値、 $\mu$ は未定係数をそれぞれ表わす。上記の正規方程式により $n$ 個の重み係数 $\lambda$ が決定され、任意地点 $X_0$ の地下水位 $h^*$ が推定されることになる。

各観測地点における地下水位のトレンドは観測値を時系列データと考え、3次多項式からなる回帰式により推定を行なう。また、非観測地点においては、位置座標を関数として観測地点のトレンドを補間して求める。

2-4. 透水量係数の同定 透水量係数の同定法に関しては、一般に、地下水応答に基づく流動モデルを作成し、地下水位の観測値と計算値との差のノルムを最小にする透水量係数を探索する最小二乗法が多用されている。この同定法は観測値に限られた少数の場合にも適用することができるため、本報では同法を採用する。

平面二次元地下水流動は、次式の支配方程式をガラーキン有限要素法により定式化し、モデル化を行なう。

$$S(\partial h / \partial t) - \nabla_{xy} \cdot (T \cdot \nabla_{xy} h) + q = 0 \quad \dots(5)$$

ここに、 $S$ は貯留係数、 $T$ は透水量係数、 $q$ は涵養・揚水量、 $\nabla_{xy}$ は微分演算子、 $x, y$ は平面座標を示す。地下水位は透水量係数の関数で表わされるため、同定過程は非線形となる。従って、地下水位の線形化を行ない、次式で透水量係数を反復改良し、その最適推定値を探索することとする。

$$T(k+1) = T(k) + \Delta T, \quad \Delta T = (J^T J)^{-1} J^T [h - h_c(T)] \quad \dots(6)$$

ここに、 $\Delta T$ は透水量係数の修正量、 $k$ は反復回数、上付き英字・ $T$ は転置、 $h$ は地下水位観測値、 $h_c$ はその計算値をそれぞれ示す。 $J$ はヤコビアン行列と呼称される地下水位の透水量係数に関する偏微分係数である。

### 3. 解析結果

地下水位観測値からトレンドを除いた変動量を距離80m刻みで階級分けを行ない、バリオグラムを求めた結果を図-1に示す。この図から相互に有為な傾向が認められる範囲はおおよそ500mである。従って、任意地点の地下水位の推定には、解析領域内のすべての観測値を用いることなく、推定地点を中心とする半径250mの円内にある観測値のみを考慮するとよいことになる。得られたバリオグラムは次式で与えられる。

$$\gamma(d) = 0.5126 \times 10^{-5} \cdot d \quad (d < 500m) \quad \dots(7)$$

上式を(3)式に代入して得られる地下水位推定値と観測値との残差の平均は $0.705 \times 10^{-3}$ であり、また残差の分散と(4)式から得られる理論上の最小分散との対比は1.095となる。この結果、推定値には偏りがなく同時に最小の分散を有することから、(7)式は(3)式が線形不偏最良推定となるための設定条件を満足する。なお、貯留係数に関するバリオグラムは有為な傾向を示さず、空間分布構造を有しないランダム変数となる。

非観測地点の透水量係数は、帯水層を70節点、52個の小矩形領域に分割し、60日間の地下水位観測値を与えて有限要素法による数値モデルで推定を行ない、図-2に示す結果を得た。この図は地下水位観測値と計算値との差のノルムが $1.0 \times 10^{-3} m^2$ 以下で、かつ反復過程のノルムの変化量が $1.0 \times 10^{-4} m^2$ 以下の場合に最適推定値に収束したものと判定した。ただし、有限要素法においては要素内で一定の透水量係数が同定されるため、各節点における地点透水量係数はその節点を共有する要素群の平均値で与えた。

地下水位から透水量係数を求める逆問題において、同定過程が非線形であるため最適推定値が得られない場合が生ずる。これは主にヤコビアン行列 $J$ の値が小さいことに起因する。本報ではこの $J$ が大きく透水量係数の反復修正が適量で、残差のノルムの応答性がよいことから解析全域で最適推定値を得たと考えられる。

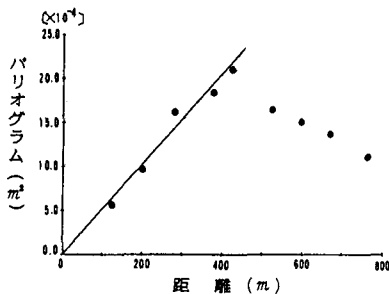


図-1 透水量係数のバリオグラム

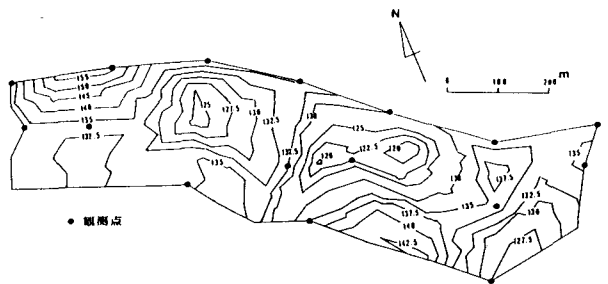


図-2 透水量係数の空間分布推定 単位(m/day)

参考文献 1) Delhomme, J.P; Kriging in the Hydrosiences, Ad.Water Resour., 1-5, pp.251-266, 1978