

浅層地下水流動モデルの不確定要因とその時・空間的伝播特性

京都大学防災研究所 正 員 池淵 周一
大 阪 府 正 員 森岡 武一
京 都 大 学 大 学 院 学 生 員 村 田 啓

1.はじめに 浅層地下水の流動モデル化は、多くの形でなされているが、透水係数や有効間隙率などの滯水層定数、あるいは基盤である難透水層の位置、降雨などによるかん養量や設定した境界からの流入量、河川水位、初期水位などの多くのパラメータを含んでいる。これらのパラメータは非常に不確定で、少ない場所での地点のデータしか得ることができない。そこで本研究においては各パラメータが持つ誤差が地下水位に与える影響をテラー展開の1次の項を用いて確率構造解析する。

2.基礎方程式と有限要素法による離散化 浅層地下水における平面2次元流モデルを透水量係数ではなく、透水係数と滯水層厚の積の形で表現する次式を基礎方程式とする。

$$\frac{\partial}{\partial x} \{K(H-Z) \frac{\partial H}{\partial x}\} + \frac{\partial}{\partial y} \{K(H-Z) \frac{\partial H}{\partial y}\} + Q' = N \cdot \frac{\partial H}{\partial t}$$

また、初期条件、境界条件については通常用いられている条件を設定する。基礎方程式、初期・境界条件に3節点3要素で、内挿関数にはもっとも簡単な線形内挿関数を用いたGalerkin有限要素法を適用し、さらに時間に関する偏微分項を差分によって近似すると、最終的に次式が得られる。

$$A \cdot h + B \cdot h' = c \quad \dots \dots \dots (1)$$

3.テラー展開を用いた確率構造解析 式(1)の各項に含まれる確率変数をあげると以下になる。

- A, B ; 透水係数(K)、有効間隙率(N)、基盤高さ(Z)、現在のタイムステップでの地下水位(H)、前のタイムステップでの地下水位(H')
- c ; 有効間隙率(N)、初期水位(H0)、かん養量(Q)、境界流入量(F)
- h ; 現在のタイムステップでの地下水位(H)、河川水位(R)
- h' ; 前のタイムステップでの地下水位(H')、河川水位(R)

式(1)を確率的に解析するために、その両辺に左からAの逆行列をかけて、左辺の水位ベクトルを、全ての確率変数の平均値のまわりで1次のテラー展開を行うと、次の式が得られる。

$$h = \bar{A}^{-1} \cdot \bar{B} \cdot h' + \bar{A}^{-1} \cdot \bar{c} + \bar{D}_x \bar{h} \cdot (u - \bar{u}) + \bar{D}_h \bar{h} \cdot (h' - \bar{h}') + \bar{D}_h \bar{h} \cdot (h - \bar{h}) \quad \dots \dots (2)$$

ここで、uは全ての節点での透水係数(K)、有効間隙率(N)、基盤高さ(Z)、かん養量(Q)、境界流入量(F)からなる確率変数ベクトルで次式で与えられるものである。

$$u^T = (K_1, \dots, K_n, N_1, \dots, N_n, Z_1, \dots, Z_n, Q_1^1, \dots, Q_n^{t-1}, Q_1^t, \dots, Q_n^t, F_1^1, \dots, F_m^{t-1})$$

また、行列とベクトルの上のバーはそれが全ての変数の平均で評価されていることを示す。 $\bar{D}_x \bar{h}$ はhベクトルをxベクトルで偏微分したものである。行列の右肩のTは行列の転置を、変数の添字のn'は節点数を、m'はNeumann境界の数を、右肩の添字は時間を表しており、t'はタイムステップの最大値を示している。地下水位の平均値ベクトル $\bar{h}$ と、その共分散行列 P_{hh} は次のように得られる。なお、以下において P_{xy} はxベクトルとyベクトルの共分散行列を表すこととする。

$$\bar{h} = \bar{A}^{-1} \cdot \bar{B} \cdot \bar{h}' + \bar{A}^{-1} \cdot \bar{c} \quad \dots \dots \dots (3)$$

$$P_{hh} = E [(h - \bar{h}) \cdot (h - \bar{h})^T] =$$

$$\bar{D}_i \bar{h} \cdot P_{h'h'} \cdot (\bar{D}_i \bar{h})^T + \bar{D}_i \bar{h} \cdot P_{h'u} \cdot (\bar{D}_i \bar{h})^T + \bar{D}_i \bar{h} \cdot P_{h'h} \cdot (\bar{D}_i \bar{h})^T + \bar{D}_i \bar{h} \cdot P_{uh} \cdot (\bar{D}_i \bar{h})^T + \bar{D}_i \bar{h} \cdot P_{uu} \cdot (\bar{D}_i \bar{h})^T + \bar{D}_i \bar{h} \cdot P_{uh} \cdot (\bar{D}_i \bar{h})^T + \bar{D}_h \bar{h} \cdot P_{hh'} \cdot (\bar{D}_i \bar{h})^T + \bar{D}_h \bar{h} \cdot P_{hu} \cdot (\bar{D}_i \bar{h})^T + \bar{D}_h \bar{h} \cdot P_{hh} \cdot (\bar{D}_i \bar{h})^T \quad \dots \dots (4)$$

なお、水位ベクトルの各確率変数による偏微分項である $\bar{D}_i \bar{h}$ 、 $\bar{D}_u \bar{h}$ 、 $\bar{D}_h \bar{h}$ は以下の(5)、(6)、(7)式で求める。

$$\bar{A} \cdot \bar{D}_i \bar{h} = -\bar{D}_i \bar{A} \cdot \{E_n \cdot \bar{h}\} + \bar{B} + \bar{D}_i \bar{B} \cdot \{E_n \cdot \bar{h}'\} \quad \dots (5)$$

$$\bar{A} \cdot \bar{D}_u \bar{h} = -\bar{D}_u \bar{A} \cdot \{E_n \cdot \bar{h}\} + \bar{D}_u \bar{B} \cdot \{E_n \cdot \bar{h}'\} + \bar{D}_u \bar{c} \quad (6)$$

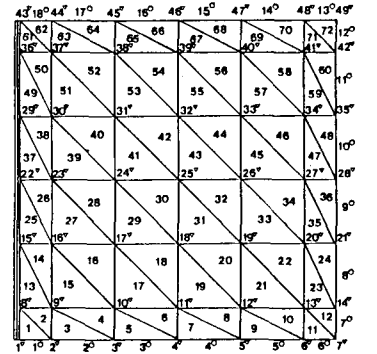
$$\bar{A} \cdot \bar{D}_h \bar{h} = -\bar{D}_h \bar{A} \cdot \{E_n \cdot \bar{h}\} + \bar{D}_h \bar{B} \cdot \{E_n \cdot \bar{h}'\} \quad \dots (7)$$

ここに、 E_n は $n' \times n'$ の単位行列、 $*$ はクロネッカーの積である。また、 $P_{hu}, P_{hh'}$ は以下の (8), (9) 式で求める。

$$(E - \bar{D}_u \bar{h}) \cdot P_{hu} = \bar{D}_i \bar{h} \cdot P_{h'u} + \bar{D}_u \bar{h} \cdot P_{uu} \quad \dots (8)$$

$$(E - \bar{D}_h \bar{h}) \cdot P_{hh'} = \bar{D}_i \bar{h} \cdot P_{h'h'} + \bar{D}_u \bar{h} \cdot P_{uh'} \quad \dots (9)$$

4. 仮想領域を対象としたシミュレーション 解析の対象領域は Fig.1 に示すような49個の節点をもつ仮想領域である。全節点での透水係数が $COV = 0.6$ の誤差を持つケースの結果が Fig.2 である。標準偏差の空間的分布をみると、境界流入量のある節点でのみやや大きい、他はほぼ一様に分布している。また時間的変動をみると、ある程度の値に達するとほぼ定常になるような曲線を描いている。これは透水係数が水平方向の流動に関わっているため、平均水位の変動が少ないため、水平方向の流量は変化せず、そのためにこのような曲線になったと思われる。また、どの変数の誤差が水位に与える影響が大きいかわかるために、全ケースの結果を縦軸を合わせて比較したところ明らかに境界流入量、基盤高さ、河川水位の誤差の影響は無視できるほど小さく、初期水位の誤差の影響も、時間とともに小さくなっていく。そして透水係数、有効間隙率、かん養量の誤差がほぼ同程度の影響を与えている。また水位の標準偏差は全ケースのその単純な足し算とならず、非常に打ち消し合っていることがわかった。結果の詳細は講演時に述べる。



1² --- Neumann boundary No.1
1² --- Node No.1
1 --- Element No.1

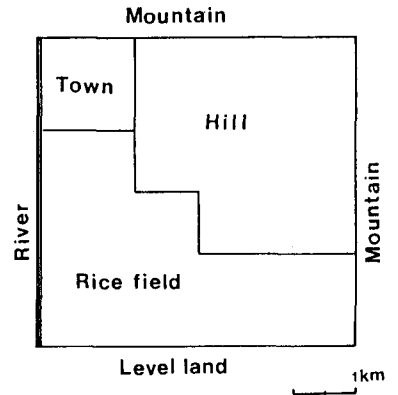


Fig.1 対象領域と要素区分

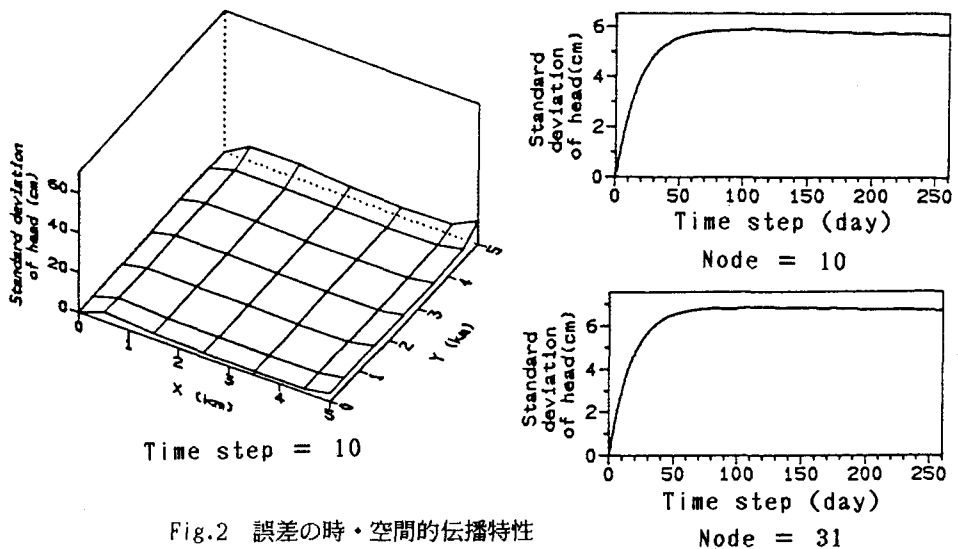


Fig.2 誤差の時・空間的伝播特性

【参考文献】 Townly, L.R. and Wilson, J.L. (1985): Water Resour. Res., Vol.21, No.12, pp.1851-1860