

II-48 単一斜面雨水流モデルにおけるショックフロントの発生・追跡について

京都大学防災研究所 正会員 友杉邦雄・石原安雄

1. はじめに 我々は、流出解析における基本的問題の一つである場および入力の不均一性の効果の評価問題に関する基礎的研究の一環として、単一斜面雨水流モデルに三角形分布をするモデル降雨を与えた場合について解析的検討を行い、いくつかの興味ある結果を得、昨年度発表したが、本報は、それらのうち「降雨の空間分布によって、破壊力の大きな段波状の出水波形が生じることがある」という結果を重視し、同様なモデルにおいて、段波が生じる一般的な場合であるkinematic shock に注目し、shock 発生の可能性のある場合として、A. 有効降雨が不連続な空間分布（ステップ状減少関数）をする場合（図-1）、B. 雨域（一定強度）が斜面流下方向に等速移動する場合（図-2）、及びC. 有効降雨 r 及び（又は）流れ係数 α が空間的に連続分布（指数型単調減少関数）をする場合（図-3）を対象として、shock の発生限界やそのfront の追跡等について、解析的に検討したものであり、その解析解がこうした場合の数値計算法の妥当性の検証用となることも期している。

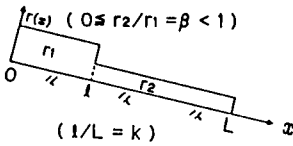


図-1 ケースA

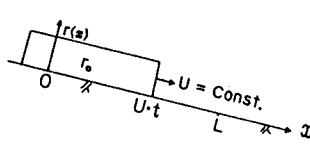


図-2 ケースB

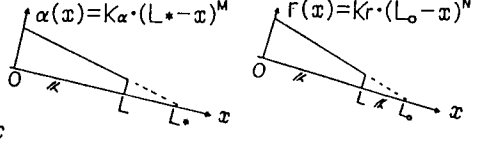


図-3 ケースC

2. 解析の方法 (1) 基礎方程式：単一斜面雨水流モデルの基礎方程式は式(1)、(2)で与えられ、一般に $\alpha = \alpha(x)$ 、 $m = \text{const.}$ とすると、それらより式(3)～(5)の常微分方程式が得られる（記号の内容は表-1の第一欄参照）。 α 、 r が t によらない場合、式(5)はベルヌイ型となり、 h が x の関数として解け、式(3)を積分して特性曲線の式が得られ、その上での解 $h(t, x)$ が得られる（但し $h(0, x) = h(t, 0) = 0$ ）。

(2) shock front の軌跡の求め方：shock front の伝播方程式は $x \sim t$ 平面上の位置を x_s 、 t_s とすると、式(6)になることが知られているが（記号は図-4参照）、この式を積分するのは困難であり、ここでは、 x_s 、 t_s を仮定し、交差する特性曲線の式とその上の解および入出力の関係に質量保存則を適用して求め、式(6)はその解の検証用とした。なお、ここでの解析計算はすべて 図-4 shock front の表-1に示す無次元化のもとに行った。

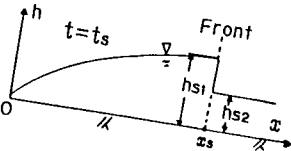


表-1 無次元化の規準量と無次元パラメータ 模式図と記号

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = r \quad \dots(1)$$

$$q = \alpha \cdot h^m \quad \dots(2)$$

$$\frac{dx}{dt} = m \cdot \alpha(x) \cdot h^{m-1} \quad \dots(3)$$

$$\frac{dh}{dt} = r - \frac{d\alpha(x)}{dx} \cdot h^m \quad \dots(4)$$

$$\frac{dh}{dx} = \frac{r}{m\alpha(x)} h^{1-m} - \frac{h}{m\alpha(x)} \cdot \frac{d\alpha(x)}{dx} \quad \dots(5)$$

$$\frac{dx_s}{dt_s} = \frac{q_{s1} - q_{s2}}{h_{s1} - h_{s2}} = \frac{\alpha(h_{s1}^m - h_{s2}^m)}{h_{s1} - h_{s2}} \quad \dots(6)$$

$$= \alpha h_{s1}^{m-1} \cdot \left(\frac{1 - \beta^m}{1 - \beta} \right)$$

$$0 \leq \beta = h_{s2}/h_{s1} < 1$$

変量（記号）	規準量（記号）	無次元量
時間（ t ）	降雨継続時間（ D ）	$t' = t/D$
水深（ h ）	空間平均有効総雨量（ $\bar{R}$ ） （一様降雨の場合 $\bar{R} = R$ ）	$h' = h/\bar{R}$
有効降雨強度（ r ）	r の時空間平均値（ $\bar{R}/D$ ）	$r' = r \cdot D/\bar{R}$
流れ係数（ α ）	α の空間平均値（ $\bar{\alpha}$ ）	$\alpha' = \alpha/\bar{\alpha}$
斜面流下距離（ x ）	斜面長（ L ） 又は、 $\bar{\alpha} \cdot \bar{R}^{m-1} \cdot D$	$x' = x/L$ $x'' = x/(\bar{\alpha} \cdot \bar{R}^{m-1} \cdot D)$
雨域の移動速度（ U ） （ x 軸正方向成分）	$\alpha \cdot \bar{R}^{m-1}$ 又は、 L/D	$u' = U/(\alpha \cdot \bar{R}^{m-1})$ $v = L/(UD)$
無次元パラメータ： $\omega = L/(\bar{\alpha} \cdot \bar{R}^{m-1} \cdot D)$ 、 $(x'' = \omega x', u' = \omega/v)$		

3. 解析結果の例と検討 (1) ケースA（図-1）：この場合、弱雨域で必ずshock が発生し、front 軌跡の一般式は k 、 ω の値によって異なり、 $\beta = 0$ （ $r_2 = 0$ ）の場合は4種類、 $0 < \beta < 1$ では6種類となる

が式形等は割愛する。興味ある結果は、 $0 < \beta < 1$ のとき、 $\gamma = h s_2 / h s_1 = \text{const.}$ となる front が必ず生じる点である。

(2) ケース B (図-2) : この場合、 ω 、 ν の値によって、shock が発生しない場合があるが、発生する場合の front 軌跡の一般式は 5 種類となり、そのうち 2 種類を以下に例示する。

$$S-1: \begin{cases} t_s' = \frac{x_s''}{u'} (1-r^*) + r h_{s1} & (0 < r = \frac{h_{s2}}{h_{s1}} < 1) \\ x_s' = h_{s1}^* \\ h_{s1}' = \left[\frac{2u' \{ m(1-r) - r(1-r^*) \}}{(m+1)(1-r^*)^2} \right] r^{m-1} \end{cases}$$

$$S-2': \begin{cases} t_s' = \frac{2m-1}{2(m-1)u} h_s'^m - \frac{m}{m-1} \cdot h_s' \\ x_s'' = \frac{m}{2(m-1)u} h_s'^{2m-1} - \frac{1}{m-1} h_s'^m \end{cases} \quad (h_{s2} = 0)$$

図-5、図-6は、それぞれ $m = 5/3$ 、 $u' = 1$ の場合について、front 軌跡、front 水深（無次元表示）を例示したものである。図-7は $m = 5/3$ （Manning 則）の場合について、

各種 shock の発生領域を $\omega \sim \nu$ の両対数平面に示したもので、山腹斜面・降雨特性等の常識的な原変量の値を想定して ω 、 ν のとり得る値の範囲を検討してみると、 $S-1$ と $S-2'$ しか生じ得ないであろうことが判明した。(3) ケース C (図-3) : この場合は、上記のケースのように front 軌跡の一般式を解析的に得ることは困難であることが判明した。但し、shock の発生しない十分条件として次式を得た。

$$N < (1 - M) / (m - 1) \quad \dots(7)$$

また、必要条件は、 L_N/L 、 L_o/L が関係することがわかった（ N 、 M 、 L_N 、 L_o は図-3中の式参照）。

なお、shock が発生するか否かに関して降雨の時間分布は無関係であり、また α がステップ状の分布をするだけでは shock は発生しないこともわかった。

4. あとがき 以上は単純なモデルに基づく数学的な解析結果にすぎず、必ずしも実際の現象と合致しない点もあるだろうことはいうまでもないが、今日実用化されている雨水流法 (kinematic wave 法) における kinematic shock の取り扱いに際してなんらかの示唆を与えるものと考えている。

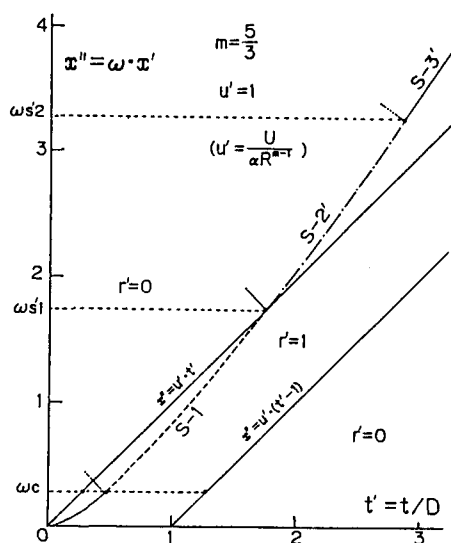


図-5 front 軌跡の例 (ケースB)

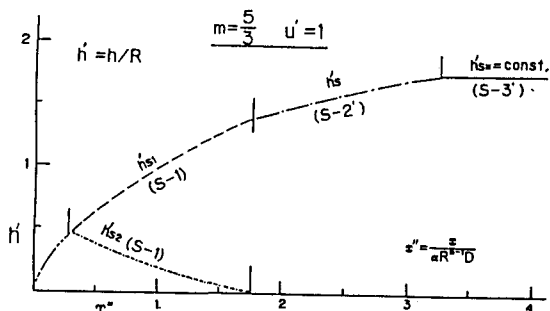


図-6 front 水深の例 (ケースB)

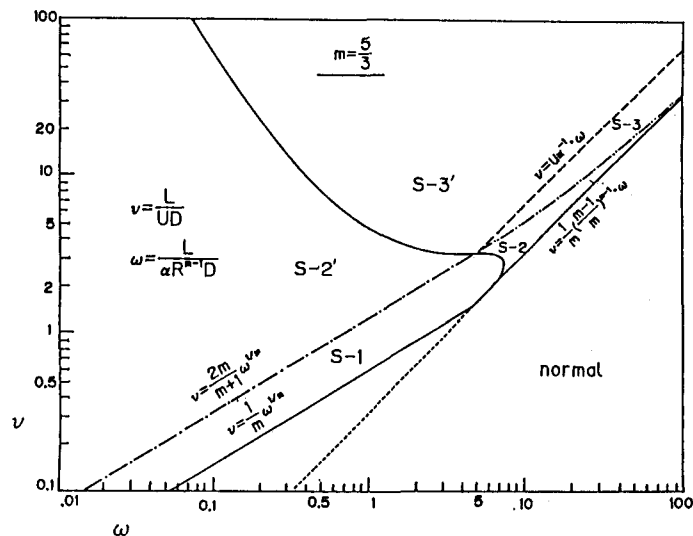


図-7 各種shock の発生・非発生領域(ケースB)

- 1) 友杉・石原：要素の流出場における降雨分布特性の効果の解析的検討、土木学会第41回年講、1986。
2) 友杉・石原：降雨分布特性が出水波形特性に及ぼす効果、京大防災研年報、第29号B-2、1986。