II-19　ダム貯水池群の実時間操作に関する考察（II）

建　設　省　正　員　児玉好史
京都大学工学部　正　員　高棹琢馬
京都大学工学部　正　員　椎葉充晴
京都大学大学院　学生員　張　昇平
京都大学大学院　学生員　立川康人

1.はじめに　筆者らはすでに Georgakakosら[1]が提案したダム貯水池群実時間操作手法をもとに，システムの不確かさ，観測情報・インプットの予測の有効利用，コントロール(放流量)と状態(貯水量)の確率的な制約条件，「次元の呪い」の問題を念頭においた実時間操作手法を提案している[2)3)]．本報告では，その計算機プログラム化の検討結果を提示する．

2.統計的二次近似手法[4)]　n 次元ベクトル ξ の関数 $g(\xi)$ と，平均値 $\bar{x}$，共分散行列 P をもつ n 次元確率ベクトルが与えられているとき，$x\sim N(\bar{x},P)$ と仮定して定数 B^*，n 次元ベクトル H，n 次元対称行列 A を

$$J(B^*,H,A)=E\{\,|\,g(x)-B^*-H(x-\bar{x})-1/2(x-\bar{x})^TA(x-\bar{x})\,|\,\} \tag{1}$$

が最小になるようにとって，関数 $g(x)$ を

$$g(x)=B^*+H(x-\bar{x})+1/2(x-\bar{x})^TA(x-\bar{x}) \tag{2}$$

と近似する．このような近似を統計的二次近似と呼ぶ．

3.操作手法　確率ベクトルの関数の大域的な近似手法である統計的二次近似手法を用いて LQG (Linear dynamics, Quadratic performance indeces, Gaussian uncertanities)システムに問題を変換し，DDP[5)]に似た手法を用いた Open-Loop Feedback Controler (OLFCと略す) によりコントロールを逐次決定する．OLFC とは各時刻において次の操作を行うものである．

(a) 現在までの情報 I_{k_0} を用いて，状態 s_{k_0} の確率分布 $P(s_{k_0}/I_{k_0})$を求める．

(b) 時刻 k_0 以後は観測がないものと仮定して，目的関数 J を最小にするコントロールの系列 $\{u_k\}_{k=k_0,\ldots,T-1}$ を求める．T は終端時刻である．

(c) (b)で求めたコントロールの系列のうち，時刻 k_0 のコントロール u を適用する．

(d) 時刻 k_0+1 での情報を I_{k_0} に加え I_{k_0+1} とし，(a)にもどって繰り返す．

4.定式化　OLFC において最適なコントロールを求める(b)の部分を定式化する．

状態方程式　$s_{k+1}=\Phi_k s_k+B_k u_k+\xi_k$, $k=0,\cdots,T-1$　(3)

目的関数　$J=\sum_{k=0,\ldots,T-1}[E\{l_{k+1}(s_{k+1})+m_k(u_k)\}]$　(4)

ただし，期待値は，確率変数 s_0，$\{\xi_k\}_{k=0,\ldots,T-1}$ についてとる．

コントロールの制約条件　$u_{jk}^{min}\leqq u_{jk}\leqq u_{jk}^{max}$，　$j=1,\cdots,n_u$, $k=0,\cdots,T-1$　(5)

状態量の確率的制約条件

$$\int_{-\infty}^{s_{jk}^{min}}Pr(s_{jk})ds_{jk}\leqq\gamma_{jk}^{min},\quad \int_{s_{jk}^{max}}^{+\infty}Pr(s_{jk})ds_{jk}\leqq\gamma_{jk}^{max},\quad j=1,\cdots,n_s,\ k=1,\cdots,T \tag{6}$$

(5),(6)の制約条件を満たし，(4)の目的関数 J を最小にする $\{u_k\}_{k=0,\ldots,T-1}$ を求める．

ただし，s_k:n_s次元状態ベクトル．添字 k は時刻を表し，現在時刻を 0 とする．s_{jk} はs_kの第j成分．$s_0\sim N(\bar{s}_0,\bar{P}_{s0})$．$u_k$:$n_u$次元コントロールベクトル．$u_{jk}$ は u_k の第j成分．ξ_k:n_s次元ノイズベクトル．$\xi_k\sim N(0,Q_{\xi k})$．$E\{\xi_k\xi_m^T\}=Q_{\xi k}\cdot\delta_{km}$．$E\{\xi_k s_0^T\}=0$．$\Phi_k,B_k$:各々 $n_s\cdot n_s$次，$n_s\cdot n_u$次係数行列．$l_k(s_k)$:時刻 k での状態ベクトルの関数．$m_k(u_k)$:時刻 k でのコントロールベクトルの関数．$u_{jk}^{min},u_{jk}^{max}$，$s_{jk}^{min},s_{jk}^{max}$:各々 u_{jk},s_{jk} の下限値と上限値．$Pr(s_{jk})$:状態量s_{jk}の確率密度関数．$\gamma_{jk}^{min},\gamma_{jk}^{max}$:各々 状態量 s_{jk}が s_{jk}^{min} より小さくなる確率の許容値と s_{jk}^{max} より大きくなる確率の許容値．

5.解法の概要　4．で定式化した問題の解法を概説する．コントロールの制約条件（5）を満たすコントロールの系列 $\{u_k^{(i)}\}_{k=0,...,T-1}$ を最適なコントロールの候補値として選び，これに対応する状態量の系列 $\{s_k^{(i)}\}_{k=1,...,T}$ を求める．この候補値の近傍で目的関数 J の中の関数 l_k と m_k をそれぞれ統計的二次近似とテーラー展開を用いて二次関数で近似し，問題を LQG システムに変換する．状態量の確率的制約条件を状態量の期待値で関する制約条件に変換し，ペナルティ関数を目的関数に付加した拡大目的関数により，状態量の期待値の制約条件を目的関数の中に含めて扱う．状態量に関しては無制約な問題に置き換えられるので，問題はコントロールに関する有制約問題となる．これを DDP に似た手法を用いて反復計算により解き，最適なコントロールを得る．

6.適用　図－1 に本手法の適用例を示す．ペナルティ関数の値はほとんど 0 に等しく，得られたコントロールは状態量の確率的制約条件を満たす最適なコントロールである．

7.おわりに　本研究で提案した手法は特に以下の点で有効である．(1) DDP に似た方法を用いることにより次元の呪いから解放される．(2) 状態量は確率変数であるから，目的関数の状態量に関する部分は統計的二次近似を用いて大域的に二次関数で近似することにより，状態の不確かさをより考慮できる．(3) 目的関数の状態量に関する部分をテーラー展開を用いて二次関数で近似すると，最適なコントロールが得られない場合がある．この場合，統計的二次近似を用いれば最適なコントロールが得られる．

状態ベクトルの次元 $n_s=2$，　コントロールベクトルの次元 $n_u=2$，　制御期間 $T=6$

状態方程式　$s_{k+1}=\Phi_k s_k+B_k u_k+C_k+\xi_k \qquad k=0,\cdots,T-1$

$$\Phi_k=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\quad B_k=\begin{bmatrix}-1&0\\1&-1\end{bmatrix}\quad C_k=\begin{bmatrix}0.3\\0.0\end{bmatrix}\quad Q_{\xi k}=\begin{bmatrix}0.3&0.0\\0.0&0.3\end{bmatrix}\quad s_0=\begin{bmatrix}0.7\\0.7\end{bmatrix}\quad \bar{P}_{s0}=\begin{bmatrix}0.3&0.0\\0.0&0.3\end{bmatrix}$$

目的関数　$J=\sum_{k=0,...,T-1}[E\{l_{k+1}(s_{k+1})+m_k(u_k)\}]$

$$l_{k+1}(s_{k+1})=\cosh(s_{1,k+1}-a_{1,k+1})+\cosh(s_{2,k+1}-a_{2,k+1})$$

$$m_k(u_k)=\cosh(u_{1,k}-b_{1,k})+\cosh(u_{2,k}-b_{2,k})$$

$$\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}&a_{15}&a_{16}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}&a_{25}&a_{26}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.8&0.85&0.9&0.95&1.0&1.05\\0.6&0.7&0.8&0.9&1.0&1.1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}b_{10}&b_{11}&b_{12}&b_{13}&b_{14}&b_{15}\\b_{20}&b_{21}&b_{22}&b_{23}&b_{24}&b_{25}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.5&0.55&0.6&0.65&0.7&0.75\\0.3&0.4&0.5&0.6&0.7&0.8\end{bmatrix}$$

コントロールの制約条件　$0.0\leqq u_{jk}\leqq 3.0$, $j=1,\cdots,n_u$, $k=0,\cdots,T-1$

状態量の制約条件　$s_{jk}^{min}=0.0$, $\gamma_{jk}^{min}=0.2$, $j=1,\cdots,n_s$　$k=1,\cdots,T$

$s_{jk}^{max}=3.0$, $\gamma_{jk}^{max}=0.2$, $j=1,\cdots,n_s$　$k=1,\cdots,T$

目的関数の値　37.705		ペナルティ関数の値　0.000	拡大目的関数の値　37.705
時刻	コントロール		状態量の期待値および状態量の期待値の下限値と上限値	
k	u_{1k}	u_{2k}	$\bar{s}_{1,k+1}$ ($\bar{s}_{1,k+1}^{min}$, $\bar{s}_{1,k+1}^{max}$)	$\bar{s}_{2,k+1}$ ($\bar{s}_{2,k+1}^{min}$, $\bar{s}_{2,k+1}^{max}$)
0	0.138	0.145	0.862 (0.652, 2.348)	0.693 (0.652, 2.202)
1	0.227	0.122	0.936 (0.798, 2.202)	0.798 (0.798, 2.202)
2	0.247	0.124	0.988 (0.922, 2.078)	0.922 (0.922, 2.078)
3	0.241	0.132	1.048 (1.031, 1.969)	1.031 (1.031, 1.969)
4	0.219	0.120	1.129 (1.129, 1.871)	1.129 (1.129, 1.871)
5	0.210	0.119	1.220 (1.220, 1.780)	1.220 (1.220, 1.780)

図－1　本手法の適用例　（ 問題の定式化とその結果 ）

参考文献 1)GEORGAKAKOS,A.P. AND D.H.MARKS:REAL TIME CONTROL OF RESERVOIR SYSTEMS,Dept.of Civil Engineering, M.I.T., TR No.301, Cambridge,Mass., 1985. 2)高棹琢馬，椎葉充晴，張昇平，児玉好史:ダム貯水池の実時間操作に関する考察，第41回年次講演会概要集，1986. 3)高棹琢馬，椎葉充晴，張昇平，児玉好史:統計的二次近似手法を用いたダム貯水池群実時間操作，第31回水理講演会論文集，1987. 4)高棹琢馬，椎葉充晴，富澤直樹:統計的二次近似理論を適用した流出予測システムの構成，京大防災年報第27号B-2, 1984. 5)JACOBOSON,D. AND D.MAYNE:DIFFERENTIAL DYANAMIC PROGRAMMING, Elsevier, New York, 1970.