II－1　ガンベル分布の推定母数の信頼性

信州大学大学院　学生員　草刈智一
信州大学工学部　正会員　寒川典昭
信州大学工学部　正会員　荒木正夫
長　野　県　　　　上原　剛

１．はじめに

一般に、特に超過確率の大きい確率水文量は非常に不確定であることが従来から経験的に知られている。この不確定さを支配する主要な原因の１つに、データの量的・質的不十分さのために確率分布の母数推定に十分な情報が与えられていないことがあげられる。これまで我々は、この問題に対処するためにデータ数の増加と確率分布の母数推定精度との関係をエントロピー的立場から論じてきた。[1),2),3),4)] 本稿では、これらの研究の継続としてガンベル分布の推定母数の信頼性について検討したものである。

２．理論式

（１）尺度母数を未知、位置母数を既知とした場合

尺度母数ａとは無関係に一定で既知の位置母数ｂをもって、ｎ個の確率変数$\tilde{x}(n)$ ＝（$\tilde{x}_1$ ，・・，$\tilde{x}_n$）が互いに独立に(1) 式のガンベル分布に従うものとする。この時、確率変数$\tilde{a}$の事前確率分布に(2) 式の一様分布を仮定すると、$\tilde{x}(n)=x(n)$ が与えられた後の$\tilde{a}$の事後確率分布は(3) 式となる。従って、$\tilde{a}$の事後確率分布のエントロピーは(4) 式で与えられる。尚、(3) 、(4) 式中のＫとＡは(5) 、(6) 式で表されるものである。

（２）尺度母数・位置母数を共に未知とした場合

$\tilde{x}(n)$ が互いに独立に(1) 式のガンベル分布に従うものとする。この時、（$\tilde{a}$，$\tilde{b}$）の事前確率分布に(7) 式の一様分布を仮定すると、$\tilde{x}(n)=x(n)$ が与えられた後の（$\tilde{a}$，$\tilde{b}$）の事後確率分布は(8) 式となる。従って、（$\tilde{a}$，$\tilde{b}$）の事後確率分布のエントロピーは(9) 式で与えられる。尚、(8) 、(9) 式中のＫは(10) 式で表されるものである。

３．実測資料への適用

計算には年最大日降水量を用い、資料数は観測した年代の新しい資料から順番にｎ＝１、２、・・としている。

（１）尺度母数を未知、位置母数を既知とした場合

事前情報であるa_1 、a_2 は次のようにして設定した。まず全観測資料を10個ずつの組に分け、その各々の組に対してａを推定し、その中の最小値をa_1 、最大値をa_2 とした。又、既知であるとした位置母数ｂは、

$$b=\theta-\gamma_E\sqrt{6v}/\pi \qquad (11)$$

とした。ここで、(11)式中のθとｖは全観測資料から計算される平均と分散であり、γ_E はオイラー定数である。fig.1 は資料数増加に伴うエントロピーの変化を示したものである。この図より、資料数が20個程度まではエントロピーの値は大きく増加減少を繰り返していることがわかる。このように大きく増加減少を繰り返している場合は、事後確率分布が大きく揺れ動いていると思われるので20個程度の資料で尺度母数ａを推定するのは危険であると言える。

（２）尺度母数・位置母数を共に未知とした場合

事前情報であるa_1 、a_2 、b_1 、b_2 は３.(1)の場合と同様な方法により設定した。fig.2 は資料数増加に伴う年最大日降水量とエントロピーの変化を示したものである。この図より、資料数が20個程度のところまではエントロピーは大きく変動しているが、それ以後はほぼ直線的に減少しているのがわかる。

table.1 数式の一覧

$$f(x) = a\exp\{-a(x-b)-e^{-a(x-b)}\} \quad (1)$$

$$f(a) = 1/(a_2-a_1) \quad (2)$$

$$f(a\ x(n)) = Ka^n \exp(aA-e^{ab}\sum_{i=1}^{n} e^{-ax_i}) \quad (3)$$

$$H(a) = \ln k - \frac{n}{K}\int_{a_1}^{a_2} a^n \ln a\ \mathrm{exo}(aA-e^{ab}\sum_{i=1}^{n} e^{-ax_i})\,da - \frac{A}{K}\int_{a_1}^{a_2} a^{n+1}\exp(aA-e^{ab}\sum_{i=1}^{n} e^{-ax_i})\,da + \frac{1}{K}\int_{a_1}^{a_2} e^{ab}\sum_{i=1}^{n} e^{-ax_i}\, a^n \exp(aA-e^{ab}\sum_{i=1}^{n} e^{-ax_i})\,da \quad (4)$$

$$K = \int_{a_1}^{a_2} a^n \exp(aA-e^{ab}\sum_{i=1}^{n} e^{-ax_i})\,da \quad (5) \quad ,A = -n(\bar{x}-b) \quad (6)$$

$$f(a,b) = 1/\{(a_2-a_1)(b_2-b_1)\} \quad (7)$$

$$f(a,b\ x(n)) = Ka^n \exp\{-an(\bar{x}-b)-e^{ab}\sum_{i=1}^{n} e^{-ax_i}\} \quad (8)$$

$$H(a,b) = \ln K - \frac{n}{K}\int_{a_1}^{a_2}\int_{b_1}^{b_2} a^n \ln a \exp\{-an(\bar{x}-b)-e^{ab}\sum_{i=1}^{n} e^{-ax_i}\}\,dbda + \frac{n\bar{x}}{K}\int_{a_1}^{a_2}\int_{b_1}^{b_2} a^{n+1}\exp\{-an(\bar{x}-b)-e^{ab}\sum_{i=1}^{n} e^{-ax_i}]\,dbda - \frac{n}{K}\int_{a_1}^{a_2}\int_{b_1}^{b_2} a^{n+1}\, b\exp\{-an(\bar{x}-b)-e^{ab}\sum_{i=1}^{n} e^{-ax_i}\}\,dbda + \frac{1}{K}\int_{a_1}^{a_2}\int_{b_1}^{b_2} e^{ab}\sum_{i=1}^{n} e^{-ax_i}\, a^n \exp\{-an(\bar{x}-b)-e^{ab}\sum_{i=1}^{n} e^{-ax_i}\}\,dbda \quad (9)$$

$$K = \int_{a_1}^{a_2}\int_{b_1}^{b_2} a^n \exp\{-an(\bar{x}-b)-e^{ab}\sum_{i=1}^{n} e^{-ax_i}\}\,dbda \quad (10)$$

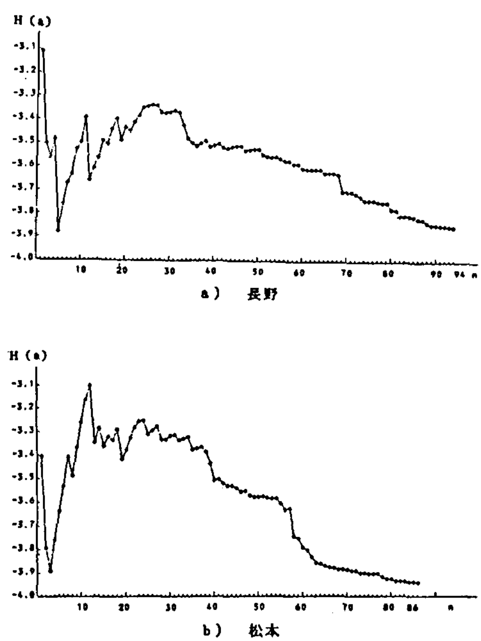

fig.1 尺度母数のエントロピーの変化

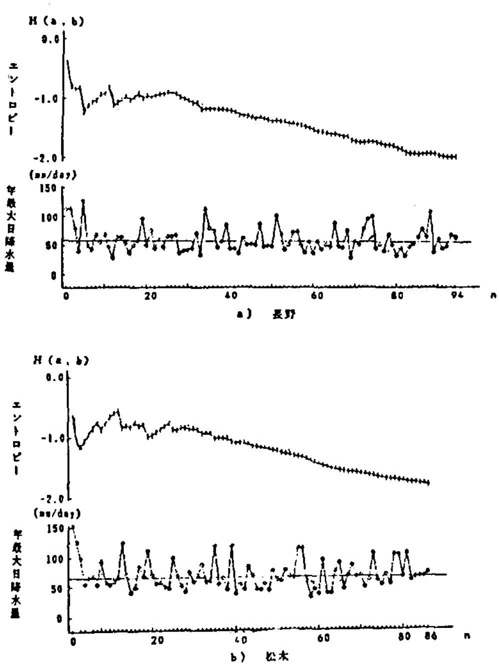

fig.2 尺度母数と位置母数のエントロピーの変化

４．おわりに

今後、水文統計上重要なその他の確率分布に対しても同様な研究を行うとともに、事前情報の与え方を検討していきたい。又、エントロピー値の減少とリターン・ピリオドの変動との関係を議論したい。

1)荒木、寒川、渡辺：確率分布の母数の不確定性評価法、59年度中部支部研究発表会講演集、1985年。
2)荒木、寒川、上原：指数分布・対数正規分布の母数推定の信頼性、60年度中部支部講演集、1986年。
3)上原、荒木、寒川：非正規母集団の推定母数の信頼性（その２）、第41回土木学会年講、1986年。
4)荒木、寒川、上原、草刈：非正規母集団の推定母数の信頼性（その３）、61年度中部支部講演集、1987年。