

PSII-7

鉛直振動流中の球の沈降速度

埼玉大学 正員 山坂 昌成
 埼玉大学 正員 池田 駿介
 日本上下水道 木内 国彦
 栃木県庁 高橋 宏樹

1. はじめに 鉛直振動を受ける流体中の粒子の平均沈降速度は、静水中のものより小さくなることが知られている^{1), 2)}。この機構を解明し、定量化することは、乱れによる土砂の浮遊現象をさらに明らかにする上で重要であると考えられる。本研究では、乱れを単純に模擬した正弦鉛直振動を受ける円筒水柱内の球状粒子の沈降速度を測定し、その推定法について理論的考察を加えた。

2. 振動法による粒子運動の解析 非定常流中の球の鉛直方向運動方程式は、Basset項を無視して、

$$(\rho_s + \chi \rho_f) V \frac{dv_s}{dt} = (\rho_s - \rho_f) V g - \frac{1}{2} \rho_f C_D A (v_s - v_f) |v_s - v_f| + \rho_f (1 + \chi) V \frac{dv_f}{dt} \quad \dots\dots (1)$$

で表される。ここに、 ρ は密度、 v は鉛直下向き速度で、添字 s, f はそれぞれ粒子、流体の諸量であることを示す。また、 V, A は粒子の体積、投影面積、 χ は仮想質量係数(=0.5)である。流体の鉛直振動を

$$v_f = V_f \sin \theta \quad (\theta = \omega t) \quad \dots\dots (2)$$

で表し、これを式(1)に代入して静水中の沈降速度 u_0 を用いて無次元化し、相対速度 $(v_s - v_f)$ が常に正であることを仮定すると、

$$C(u - \alpha \cos \theta)^2 + af \frac{du}{d\theta} + (a-1)f\alpha \sin \theta - 1 = 0 \quad \dots\dots (3)$$

となる。ここに、 $u = v_s / u_0$, $\alpha = V_f / u_0$, $a = (S + \chi) / (S - 1)$, $S = \rho_s / \rho_f$, $f = u_0 \omega / g$, $C = C_D / C_{D0}$ である。 Re が10,000程度まで適用できる近似式

$$C_D = \frac{24}{Re} (1 + 0.152\sqrt{Re} + 0.0151Re) \quad \dots\dots (4)$$

を用いて、 C をレイノルズ数比 $R (= Re / Re_0 = u - \alpha \cos \theta; Re_0, C_{D0}$ は静水中の定常状態のもの)の関数として次式で表す。

$$C = \frac{1 + 0.152\sqrt{Re_0}\sqrt{R} + 0.0151Re_0R}{R(1 + 0.152\sqrt{Re_0}\sqrt{R} + 0.0151Re_0R)} \quad \dots\dots (5)$$

式(3)は u に関する非線形方程式であるため、 C および u を α で展開して振動法により解を求める。

C をTaylor展開すると、

$$C = 1 + \dot{C}(R-1) + \frac{\ddot{C}}{2}(R-1)^2 + \frac{\dddot{C}}{6}(R-1)^3 + \frac{C^{(4)}}{24}(R-1)^4 + \dots \quad \dots\dots (6)$$

となる。ここに、 $\dot{C} = dC/dR|_{R=1}$, $\ddot{C} = d^2C/dR^2|_{R=1}$, $\dots$ である。 $\alpha \rightarrow 0$ で、 $t \rightarrow \infty$ のとき $u=1$ となるため、 $t \rightarrow \infty$ での相対速度解を

$$u - \alpha \cos \theta = 1 + u_1(1 - \cos \theta) + u_2 \alpha^2 + u_3 \alpha^3 + u_4 \alpha^4 + \dots \quad \dots\dots (7)$$

で表す。式(6), (7)を式(3)に代入すると、 α の1次のオーダーの方程式より、

$$\left. \begin{aligned} (u_1 - \cos \theta) &= (U_1 c_1 \cos \theta + U_1 s_1 \sin \theta) / a \\ U_1 c_1 &= \{-(af)^2\} / \{(af)^2 + (2+\dot{C})^2\} \\ U_1 s_1 &= \{(2+\dot{C})af\} / \{(af)^2 + (2+\dot{C})^2\} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots (8)$$

が得られる。さらに高次のオーダーの方程式より、 u_2, u_3, u_4 が求まるが紙面の関係上、 α の4次のオーダーについては定常項のみを残した $u - \alpha \cos \theta$ の関数形のみを示す。

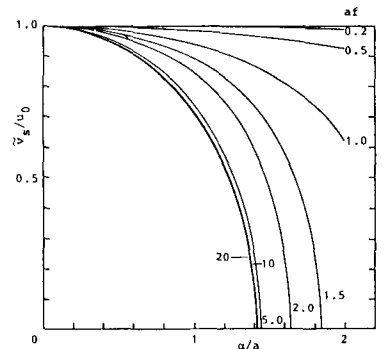


図-1 Houghtonの理論

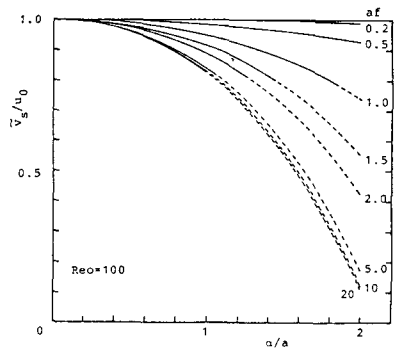


図-2 本理論による平均沈降速度

$$u - \alpha \cos \theta = 1 + (U_{1c1} \cos \theta + U_{1s1} \sin \theta) (\alpha/a) + (U_{2c} + U_{2c2} \cos 2\theta + U_{2s2} \sin 2\theta) (\alpha/a)^2 + (U_{3c1} \cos \theta + U_{3s1} \sin \theta + U_{3c3} \cos 3\theta + U_{3s3} \sin 3\theta) (\alpha/a)^3 + (U_{4c} + \dots) (\alpha/a)^4 \dots (9)$$

したがって、無次元平均沈降速度は $\bar{u} = \bar{v}_s / u_0 = 1 + U_{2c} (\alpha/a)^2 + U_{4c} (\alpha/a)^4 \dots$ となる。 U_{2c}, U_{4c} は af, Re_0 のみの関数である。

3. Houghton の解析結果および実験値との比較 Houghtonは抗力係数 C_0 が相対速度に依存しないことを仮定して式(3)において $C=1$ とし、変数変換して得られるMathieu方程式の解の安定性から $\bar{u}(t \rightarrow \infty)$ を求めている。この解と本解析結果を比較したものが図-1、2である。図-2中の破線は $u - \alpha \cos \theta < 0$ の領域まで解析結果を適用した曲線である。Houghtonの理論は Re_0 に無関係であるが、本解析結果は Re_0 の関数となり、ここでは $Re_0=100$ を例として示した。本理論による沈降速度は Re_0 が小さいほどHoughtonによるものより大きく、 Re_0 が十分大きいときHoughtonの解（同一オーダーまでの解）に一致する。これは抗力係数が瞬間レイノルズ数に依存しないと仮定したHoughtonによる無次元平均抗力 $\overline{(u - \alpha \cos \theta)^2}$ が $C(u - \alpha \cos \theta)^2$ より大きくなることによる（ $u - \alpha \cos \theta \geq 1$ のとき $C \leq 1$ 、 $u - \alpha \cos \theta \leq 1$ のとき $C \geq 1$ ）。無次元振動数 af の影響は、両者とも af が大きいほど沈降速度を小さくするが、 $af \geq 10$ では振動数による変化はほとんどない。

図-3、4は、 $V_r / u_0 / a$ が比較的大きな領域までとれた実験結果と、本解析結果およびHoughtonの解析結果との比較を示す。図-3は比重2.49, 直径0.103cmのガラス球、図-4は比重1.06, 直径0.098cmのポリスチレン球の場合を示す。両図中、○印は振動数10hz, ●は振動数16hzの場合の実験値であり、実線が本理論、一点鎖線がHoughtonの理論を示す。ガラス球、ポリスチレン球とも、 $V_r / u_0 / a$ が大きくなるほどHoughton解より本解析結果に近い値を示すことがわかる。しかし、振動数の影響は理論的には高振動数ほど沈降速度が低下するのに対して、図-3では実験値が逆の傾向を示すが、この理由については明かではない。図-2、3、4より、 af が比較的大きい場合、本解析の適用限界は $V_r / u_0 / a \leq 1.2$ となる。 $V_r / u_0 / a$ が比較的大きな領域については、振動法による相対速度の周期振動解を用いてHwang²⁾と同様の数値計算を試みている。なお、比重1.06, 直径0.24cmのポリスチレン球、比重1.03, 直径0.60cmのプラスチック球についても実験を行ったが、振動台の性能上、 $V_r / u_0 / a$ を大きくとれなかったため、沈降速度の低下はほとんど見られなかった。

4. まとめ 鉛直振動流中の球の沈降速度の低下は、流体抗力が相対速度と線形関係になく、相対速度が大きいほどそれが非線形的に増加することによる。Houghtonの理論ではこの関係が相対速度の2乗となっていることから沈降速度の低下が極めて大きくなるが、抗力係数を相対速度に依存させた本解析ではベキ数が Re_0 により1~2の範囲で変化するため、Houghtonによるものより沈降速度は大きく、実験値との対応も良い。

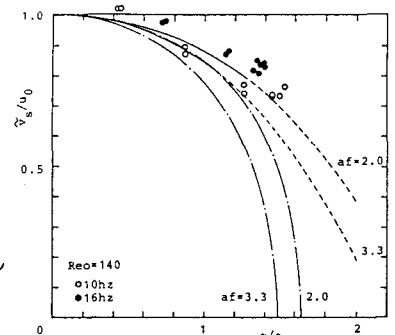


図-3 実験値との比較（ガラス球）

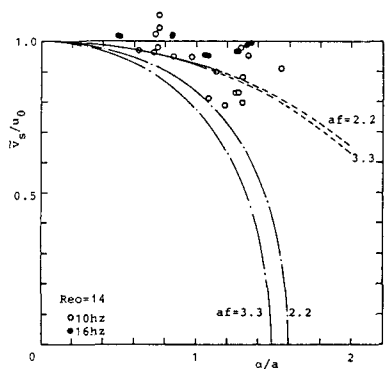


図-4 実験値との比較（ポリスチレン球）

1) Houghton, G.: Particle Retardation in Vertically Oscillating Fluids, The Canadian Journal of Chemical Engrg., Vol. 46, pp. 79-81, 1968.

2) Hwang, P., A.: Fall Velocity of Particles in Oscillating Flow, ASCE, Vol. 111, No. HY3, pp. 485-502, 1985.