

PSII-4 統計的二次近似理論の展開とその水文予測・制御への応用

京都大学工学部 正 員 椎葉 充晴

京都大学工学部 正 員 高樺 琢馬

京都大学大学院 学生員 立川 康人

1. はじめに 高樺・椎葉¹⁾²⁾³⁾は、確率変数（ベクトル）の非線形関数の近似の方法として統計的二次近似手法を提案し、これを用いた水文予測の理論を展開している。さらに、張・児玉⁴⁾は、この手法をダム貯水池群の実時間操作に応用しようとしている。本報告では、この手法の理論的側面について、特にTaylor展開による近似や統計的線形化との関係を要約して提示し、計算例を示す。

2. 統計的二次近似手法 2.1 統計的二次近似の定義 n次元ベクトル ξ の関数 $g(\xi)$ と、平均値 $\bar{x}$ 、共分散行列 P をもつn次元確率ベクトル x が与えられているとき、 $x \sim N(\bar{x}, P)$ と仮定して、定数 B^* とn次元行ベクトル H 、n次元対称行列 A を、 $J(B^*, H, A) = E\{lg(x) - B^* - H(x - \bar{x}) - 1/2 \cdot (x - \bar{x})^T A (x - \bar{x})\}^2 \dots\dots (1)$ が最小になるようにとって、確率変数 $g(x)$ を $g(x) \approx B^* + H(x - \bar{x}) + 1/2 \cdot (x - \bar{x})^T A (x - \bar{x}) \dots\dots (2)$ と近似する。このような近似を統計的二次近似と呼ぶ。ベクトル値関数の統計的二次近似は、成分ごとに統計的二次近似する。 B^* 、 H 、 A は、方程式 $B^* = E\{g(x)\} - 1/2 \cdot \text{tr}[AP]$, $PH^T = E\{(x - \bar{x})g(x)\}$, $PAP^T = E\{(x - \bar{x})(x - \bar{x})^T g(x)\} - E\{g(x)\}P \dots\dots (3)$ から定められる。 2.2 統計的線形化との関係 $B = E\{g(x)\} = B^* + 1/2 \cdot \text{tr}[AP]$ とおくと、 $g(x)$ は

$$g(x) = \underbrace{B + H(x - \bar{x})}_{\text{統計的線形化と同じ項}} + \underbrace{\{1/2 \cdot (x - \bar{x})^T A (x - \bar{x}) - 1/2 \cdot \text{tr}[AP]\}}_{\text{統計的二次近似で追加される項}} + \underbrace{\varepsilon_2}_{\text{統計的二次近似の誤差}} \dots\dots (4)$$

と表される。統計的二次近似は ε_2 を無視するもの、統計的線形化は上式第2項も無視するものである。上式の第1, 2, 3項は互いに無相関である。 2.3 Taylor展開による近似との関係 分散 P が0に収束するとき、 H は $g(x)$ の $\bar{x}$ での微係数に収束する。統計的線形化、統計的二次近似によって得られる近似関数の期待値は元の関数の期待値に一致するが、Taylor近似による場合、これらは一般には一致しない。 2.4 統計的二次近似と確率変数の関数の期待値との関係 共分散行列 P 、関数 g を固定して、平均値ベクトル $\bar{x}$ の関数 $J(\bar{x}) = E\{g(x)\} \dots\dots (5)$ を考える。ただし、期待値は確率ベクトル $x \sim N(\bar{x}, P)$ についてとる。この正規分布仮定のもとでは、 $\nabla_x J(\bar{x}) = P^{-1} E\{(x - \bar{x})g(x)\}$, $\nabla_x^2 J(\bar{x}) = P^{-1} E\{(x - \bar{x})(x - \bar{x})^T g(x)\} P^{-1} - P^{-1} E\{g(x)\} \dots\dots (6)$ が成り立つので、(3)式と比較して、これらは H^T 、 A に等しいことが分かる。すなわち、共分散行列 P を固定したときの平均値ベクトル $\bar{x}$ の関数 $J(\bar{x}) = E\{g(x)\}$ の勾配、ヘッセ行列は統計的二次近似のもとでは保存される。Taylor近似においてはこの性質は一般には期待できない。

3. 統計的二次近似フィルター 観測関数を統計的二次近似し、二次項を新たに付加された外乱項とみなしてKalmanフィルターを適用する非線形フィルターを統計的二次近似フィルターと呼ぶ¹⁾²⁾。この非線形フィルターと、拡張Kalmanフィルター(EKF)、Gauss近似二次フィルター(GSOF)、統計的線形化フィルター(SLF)、Gauss近似最小分散フィルター(GMMSF、非線形観測関数に直接最小分散推定法を適用したフィルター、計算量が大)などの非線形フィルターとその性能について比較する。これらの5つの非線形フィルターはいずれも観測関数 $g(x)$ を

表 1

Filter Equation : $\hat{x} = \bar{x} + K(y - b)$
 $P = \bar{P} - K\bar{h}\bar{P}$
 $K = \bar{P}\bar{h}^T / (\bar{h}\bar{P}\bar{h}^T + R + V(n))$

Nonlinear Filter	b	h	V(n)
EKF	$g(\bar{x})$	$\partial g(\bar{x})$	0
GSOF	$g(\bar{x}) + \frac{1}{2} \text{tr}[\partial^2 g(\bar{x}) \bar{P}]$	$\partial g(\bar{x})$	$\frac{1}{2} \text{tr}[\partial^2 g(\bar{x}) \bar{P} \partial^2 g(\bar{x}) \bar{P}]$
SLF	$E\{g(x)\}$	$E\{g(x)(x - \bar{x})^T\} \bar{P}^{-1}$	0
SASOF	$E\{g(x)\}$	$E\{g(x)(x - \bar{x})^T\} \bar{P}^{-1}$	$\frac{1}{2} \text{tr}[A \bar{P} A \bar{P}]^T$
GMMSF	$E\{g(x)\}$	$E\{g(x)(x - \bar{x})^T\} \bar{P}^{-1}$	$V\{g(x)\} - \text{Cov}\{g(x), x\} \bar{P}^{-1} \text{Cov}\{x, g(x)\}$
+ $A = \bar{P}^{-1} \{E\{(x - \bar{x})(x - \bar{x})^T g(x)\} - E\{g(x)\} \bar{P}\} \bar{P}^{-1}$			

表 2

Nonlinear Filter	b	h	V(n)	$\hat{P}^T$	$\hat{P}_{act}^T$
EKF	$\bar{x}^3$	$3\bar{x}^2$	0	0.10	2.98
GSOF	$\bar{x}^3 + 3\bar{x}\bar{P}$	$3\bar{x}^2$	$18\bar{x}^2\bar{P}^2$	0.68	0.42
SLF	$\bar{x}^3 + 3\bar{x}\bar{P}$	$3\bar{x}^2 + 3\bar{P}$	0	0.03	0.66
SASOF	$\bar{x}^3 + 3\bar{x}\bar{P}$	$3\bar{x}^2 + 3\bar{P}$	$18\bar{x}^2\bar{P}^2$	0.35	0.42
GMMSF	$\bar{x}^3 + 3\bar{x}\bar{P}$	$3\bar{x}^2 + 3\bar{P}$	$18\bar{x}^2\bar{P}^2 + 6\bar{P}^3$	0.41	0.41

† The numerical values in these columns are for the case $\bar{x}=1, \bar{P}=1, R=1$.

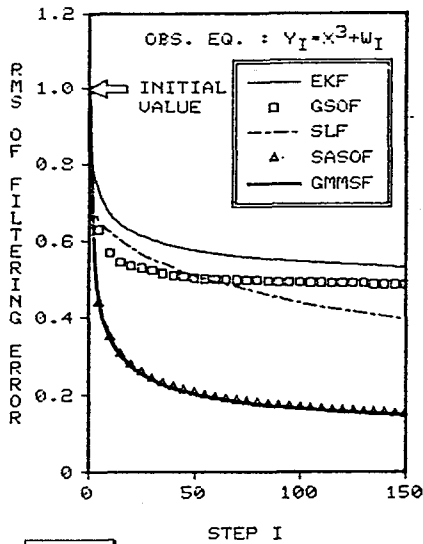


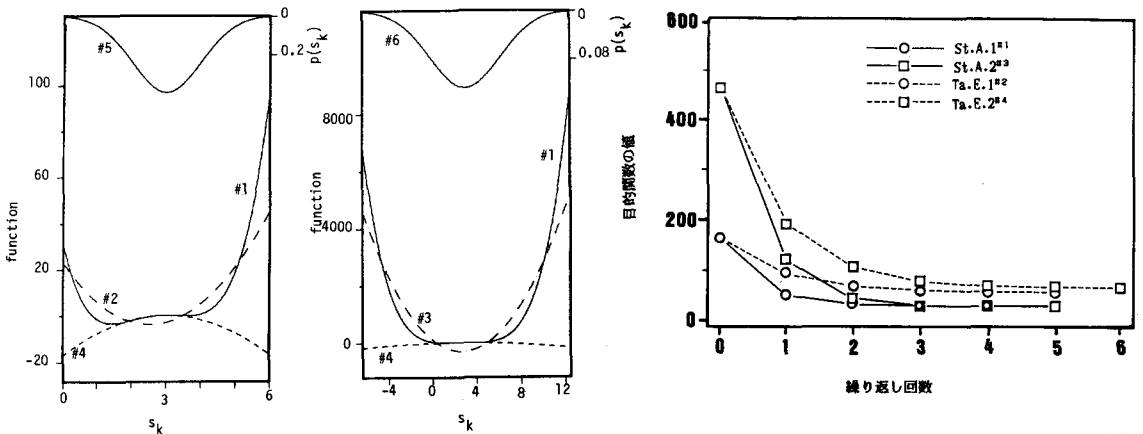
図 1

$g(x) \approx b + h(x - \bar{x}) + \eta$ の形に近似して Kalman フィルターを適用したものと解釈できる。ただし、 b はスカラー、 h は行ベクトル、 η は x と無相関である平均 0 の確率変数である。 b, h および η の分散 $V\{\eta\}$ の値を決定する式は表 1 に示す通りである。 $x \sim N(\bar{x}, P)$ が厳密に成り立つとして、これらの非線形フィルターによる推定誤差の真の分散の計算式と数値例を $g(x) = x^3$ の場合を例にとって表 2 に示す。この例では

GMMSF を除けば、SASOF が最も好ましいフィルターであることが分かる。図 1 は、 $y_i = x^3 + w_i, w_i \sim N(0, 1)$ によって確率変数 $x \sim N(1, 1)$ の観測値が逐次得られる場合の推定誤差の推移を示している。ここでも SASOF が良い結果を与えている。

4. 水資源系の制御への応用 張・児玉ら⁴⁾ はシステムの不確かさ、観測情報・インプットの予測の有効利用、コントロールと状態の確率的な制約条件、「次元の呪い」を考慮するために統計的二次近似を利用したダム群の実時間操作手法を提案している。Taylor 展開による二次近似よりも統計的二次近似の方が良いことを図 3, 4 で例証する。図 3 は、関数 $l_k(s_k) = (s_k - .9)(s_k - 2.7)(s_k - 3.6)^2$ を統計的二次近似する例と、Taylor 展開によって二次近似する例を示したものである。図 4 は、統計的二次近似と Taylor 展開による二次近似を用いた 2 ダム制御問題を解いた例であり、反復解によって目的関数値が減少していく様子を示している。Taylor 近似による場合初期値によって異なる非最適解に収束してしまった。詳細はポスターにて示す。

1) 高樺(1984): 試験研究(2) (57850172) 研究成果報告書。2) 高樺・椎葉・富澤(1984): 京大防災研年報第 27 号 B-2。3) TAKASAO, T. & SHIIBA, M(1984): Natural Disaster Science, 6(2)。4) 張・児玉・椎葉・高樺(1987): 京大防災研年報第 30 号投稿中。



#1 関数 $l_k(s_k)$, #2 $s_k \sim N(3, 1)$ として統計的二次近似して得られる二次関数, #3 $s_k \sim N(3, 10)$ として統計的二次近似して得られる二次関数, #4 $s_k = 3$ の近傍で Taylor 展開を用いて近似した二次関数, #5 $s_k \sim N(3, 1)$ としたときの s_k の確率密度関数 $p(s_k)$, #6 $s_k \sim N(3, 10)$ としたときの s_k の確率密度関数 $p(s_k)$

図 2

図 3

#1 $l_k(s_k)$ の二次近似に統計的二次近似を用い、コントロール u の初期値に u の上限値を与える方法, #2 $l_k(s_k)$ の二次近似に統計的二次近似を用い、コントロール u の初期値に u の下限値を与える方法, #3 $l_k(s_k)$ の二次近似にテラー展開を用い、コントロール u の初期値に u の上限値を与える方法, #4 $l_k(s_k)$ の二次近似にテラー展開を用い、コントロール u の初期値に u の下限値を与える方法。