

PSII-3

定係数一次元確率移流分散方程式の濃度予測手法について

九州大学 工学部 ○正 員 河村 明

九州大学 工学部 正 員 神野 健 二

九州大学 工学部 正 員 上田 年比古

1. はじめに 一般に自然現象は確率過程と考えられ、その挙動は確率微分方程式で表現されるであろう。しかし、従来、例えば移流分散現象を考える場合、確率変動項は無視され確定論的アプローチがなされ、しかも初期条件、境界条件および方程式中の物理パラメータは既知情報として取り扱われている。そこで本報では、定時間観測データを用いた、確率微分方程式の解法として、フーリエ級数展開とカルマンフィルターを用いた解法を提案している。すなわち、まず確率微分方程式として定係数一次元確率移流分散方程式を取り上げ、これをフーリエ級数展開を用いてフーリエ係数に関する常微分方程式に変形する。次いで、初期条件、境界条件および物理パラメータ(流速、分散係数、一次反応係数)は不明であるとし、空間的に任意に設置された観測点からの定時測定濃度観測情報をもとにして、カルマンフィルターにより各時点毎に物理パラメータおよびフーリエ係数を同定しながら濃度予測を行う方法を提案する。次に、本手法を模擬発生データに適用しその有効性および特性について検討を行っている。

2. 計算手法 ここでは、次式に示すような定係数一次元確率移流分散方程式を考えることにする。

$$\partial C(x,t)/\partial t + u \partial C(x,t)/\partial x = D \partial^2 C(x,t)/\partial x^2 - \gamma C(x,t) + \alpha \varepsilon(x,t) \quad (1)$$

ここに、 C :濃度、 u :流速、 D :分散係数、 γ :一次反応係数、 α :システム雑音強度、 ε :平均値0の正規性白色雑音、 x :距離、 t :時刻。まず、式(1)のような確率項を含んだ微分方程式を解くため濃度 $C(x,t)$ および雑音項 $\varepsilon(x,t)$ を次式のようにフーリエ級数に展開する。

$$C(x,t) = M(t) + \sum_{m=1}^{\infty} [A_m(t) \sin(2\pi m x / \ell) + B_m(t) \cos(2\pi m x / \ell)] \quad (2)$$

$$\varepsilon(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} [E_m(t) \sin(2\pi m x / \ell) + F_m(t) \cos(2\pi m x / \ell)] \quad (3)$$

式(2),式(3)を式(1)に代入すると、 $M(t)$ および波数 m に対するフーリエ係数に関する連立常微分方程式が次式ように得られる。

$$\begin{bmatrix} dM/dt \\ dA_m/dt \\ dB_m/dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\gamma & 0 & 0 \\ 0 & -R_m & Q_m \\ 0 & -Q_m & -R_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M(t) \\ A_m(t) \\ B_m(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha E_m(t) \\ \alpha F_m(t) \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\text{ここに、} R_m = D(2\pi m / \ell)^2 + \gamma, \quad Q_m = u(2\pi m / \ell) \quad (5)$$

また、ここでは式(1)の u, D, γ の値は時空間的に一定の場合を考えているので、これらに対する遷移方程式は次式となる。

$$du/dt = 0, \quad dD/dt = 0, \quad d\gamma/dt = 0 \quad (6)$$

さて、 x 方向に任意に配置された観測点から観測雑音 w を含んだ濃度 C が定時的に観測される場合を想定し、この観測情報をもとにカルマンフィルターにより、物理パラメータ u, D, γ およびフーリエ係数 M, A_m, B_m をシステム状態量として逐次同定してゆき濃度 C の予測を行う場合を考える。すなわち、式(4)の右辺第1項は状態量 $u, D, \gamma, M, A_m, B_m$ について非線形であるから、ここではこれをテイラー級数展開して1次の項までとる拡張カルマンフィルターを用いる。式(4)をテイラー展開した式および式(6)を時間 Δt で離散化してマトリックス表示するとカルマンフィルターの遷移行列が得られる。また、任意の x_i 地点における観測点の濃度 C は式(2)より式(7)となる。

$$C(x_i, k) = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \cdots \sin(2\pi m x_i / \ell) \cos(2\pi m x_i / \ell) \cdots] [u(k) \ D(k) \ \gamma(k) \ M(k) \cdots A_m(k) \ B_m(k) \cdots]^T + w(x_i, k) \quad (7)$$

ここに、 k :離散化された時点、 T :転置記号、 w :観測雑音。式(7)の右辺第1項のベクトルをすべての観測地点についてまとめてマトリックス表示すると、カルマンフィルターの観測行列となる。

3. 適用例とその考察 以上述べた手法を以下の模擬発生データに適用しその有効性および特性の検討を行う。ここでは、フーリエ級数展開の波数 m は20とし、 $u=1.0(\text{m/s})$, $D=0.5(\text{m}^2/\text{s})$, $\gamma=0.01(1/\text{s})$, $\Delta t=0.1(\text{s})$, $\ell=100(\text{m})$

を想定して、 M, A_m, B_m の初期値は濃度 C の形状が図-1のような初期状態となるように適当に与えて、500時点程 C を模擬発生させた。これを図-1の実線に示す。ここで式(4)の $\alpha=0.0005$ とし、 E_m, F_m には m に関係なく平均値0、標準偏差1、式(7)の w には平均値0、標準偏差0.01の正規乱数を与えた。次に、図-1の丸印はカルマンフィルタ

による1時点先の濃度 C の予測値を示している。この場合カルマンフィルタにおける $u, D, \gamma, M, A_m, B_m$ の初期値は真値の50%を与え、観測地点は3m間隔にあるものとしている。また図-2には u, D, γ の同定過程、図-3には濃度スペクトルの時間変化および $\alpha=0.0005$ に相当するシステム雑音のnoise levelを示している。図-1より模擬発生値は全般に乱れており、時点が進行するとともに乱れは大きくなっている。またカルマンフィルタによる予測値をみると、雑音に埋もれている高周波成分の小さな変動分布の予測は困難なものの、時点の進行とともに濃度分布が乱れても精度よく濃度分布形状を予測しているといえる。また図-2よりおよそ50時点程度で u, D, γ の値は精度よく同定されている。次に図-3より波数 m が大きくなる程すなわち高周波成分のフーリエ係数、雑音の影響を受けやすく、また時点が進む程低周波成分のフーリエ係数にも雑音の影響が強く作用することがわかる。さて濃度

予測精度は雑音のレベル、パラメータの初期値誤差および観測点の数に大きく影響され、上記の例の場合、観測点を10m間隔にあるものとする

と初期値誤差がない場合でも濃度予測はほとんど不可能となり、また観測雑音を加わらない場合には観測点が10m間隔であっても初期値誤差が50%くらいまでは精度よい予測が可能であった。

4. むすび 本報では実時間観測データが得られるとして、定係数一次元確率移流分散方程式の中に含まれる物理パラメータを同定しつつ濃度予測を行う手法を提案した。次にこれを模擬発生データに適用した結果、本手法が物理パラメータおよび濃度予測の同定に有効であることが示された。また、予測精度に関する本手法の特性が明らかにされた。

謝辞 本研究を遂行するにあたり、本学卒業生の西園裕一君（現在、フジタ工業）に種々御協力頂いた。ここに記して深謝申し上げる。

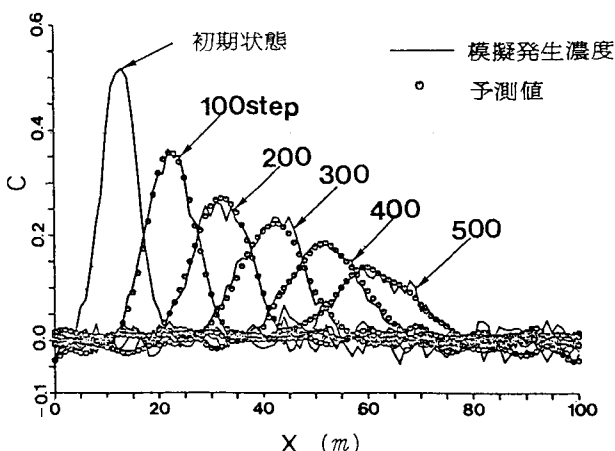


図-1 模擬発生濃度とその予測値

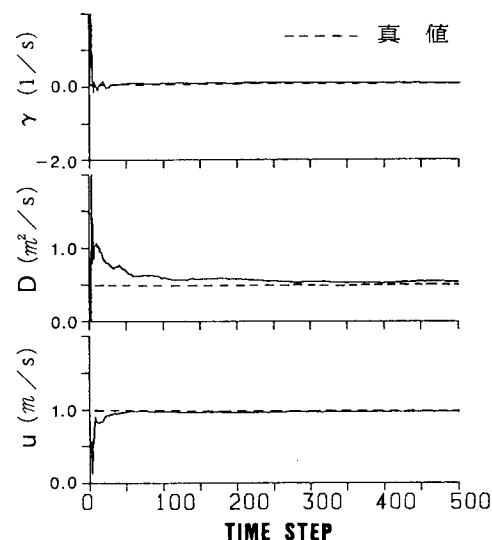


図-2 物理パラメータ u, D, γ の同定過程

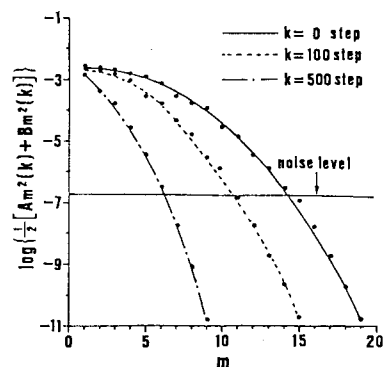


図-3 濃度スペクトルの時間変化とシステム雑音レベル