I－483　　時間領域に対するモード解析手法について

丸紅ハイテック株式会社　正員　安藤幸治

１．はじめに

現在モード解析は、広範囲にわたって行われている。それに伴い、解析手法についても簡易なものから最小二乗法の原理に基づいた手法まで多々考案されている。基本的には最小二乗法に従って式を展開しているが、誤差の評価の仕方に大きな相違が見られる。これは正規方程式の解法の違いでもある。

正規方程式は特異問題を常に抱えており、非線形問題を扱う際には発散の原因になる。そこで特異性を避けるために解析対象モードを一個に絞り、方程式を解析的に解いている手法が多く見受けられる。しかし、このモード対応型解析手法は最小二乗法の原理に反する手法であり、真値に近い固有周波数とモード減衰を観測値から読み取り初期値として与えなければ収束しない、という欠点を持つ。

以下では、モードの特定の難しい時間領域データを対象にしている。これに関した解析手法をＪ．Ｌ．Ｂｅｃｋ[1)]が既に発表しているが、この手法はモード対応型の解析手法であり、予めフーリェ交換をして固有値を検討した後に解析を行わなければならない。これに対して本手法は、特異問題を解決した上で最小二乗法の原理に忠実に展開しており、その意味で現実対応型の解析手法と言える。

２．モード解析手法について

ここで扱うデータは、ランダム波入力に対する相対加速度応答値である。Ｎ自由度を持つ振動系の運動方程式は次式となるが、今対象としている系の運動がこの方程式に従うことを前提として考えていく。

$$M\ddot{x}+C\dot{x}+Kx=f(t) \qquad ①$$

ここに、Ｍ、Ｃ、Ｋはそれぞれ質量、減衰、剛性の（Ｎ×Ｎ）行列であり、ｘ、ｆは、相対変位、外力を意味するＮ元ベクトルである。入力が加速度（ａ）であれば、ｆは慣性力－Ｍａとなる。

１）理論式の展開

振動系の固有値λ_rと固有ベクトルu_r（以下モード定数と呼ぶ）については次の固有方程式が成り立つ。

$$\lambda_r^2 Mu_r+\lambda_r Cu_r+Ku_r=0 \qquad ②$$

そしてベクトルu_rは次の直交性を持つ。

$$(\lambda_s+\lambda_r)\,u_s^T Mu_r+u_s^T Cu_r=\delta_{sr} \qquad ③$$

$$-\lambda_s\lambda_r\,u_s^T Mu_r+u_s^T Ku_r=-\lambda_s\,\delta_{sr} \qquad ④$$

今①式の変位ｘを、展開係数をα_rとしてベクトルu_rの線形結合で表現すれば次のようになる。

$$x=\Sigma\,\alpha_r(t)\,u_r \qquad ⑤$$

（以下、Σについては記さぬ限り$r=1\sim 2N$を意味する。モード定数は共役複素数を含めて２Ｎ個存在する）。

上式を①式に代入し③④の両式を考慮すれば、展開係数α_rについて次の微分方程式を得る。

$$\dot{\alpha}_r(t)-\lambda_r\alpha_r(t)=u_r^T f(t) \qquad ⑥$$

よって上式をα_rについて解けば⑤式の変位が求まる。加速度$\ddot{x}$については次のようになる。

$$\ddot{x}=\Sigma\,\dot{\alpha}_r(t)\,\lambda_r u_r \qquad ⑦$$

ここで⑥式を考える。ラプラス変換をすればα_rの初期値に関する項と外力に関する項の和になる。そこで予めα_rを$\alpha_r=\alpha_{r1}+\alpha_{r2}$と分割し、$\alpha_{r1}$に対して自由振動解を$\alpha_{r2}$には強制振動解の意味を持たせる。これより$\alpha_{r1}$、$\alpha_{r2}$は、それぞれ次の微分方程式を満たす。

$$\dot{\alpha}_{r1}=\lambda_r\alpha_{r1}(t) \qquad ⑧$$

$$\dot{\alpha}_{r2}(t)=\lambda_r\alpha_{r2}(t)+u_r^T f(t) \qquad ⑨$$

⑧式は解析的に求まり、⑨式は変数変換$\alpha_{r2}=u_r^T\beta_r$を行えば、β_rについての微分方程式を得る。

$$\alpha_{r1}(t)=\alpha_{r10}\exp(\lambda_r t),\quad \alpha_{r10}\text{；初期値} \qquad ⑩$$

$$\dot{\beta}_r(t)-\lambda_r\beta_r(t)-f(t)=0 \qquad ⑪$$

以上より⑦式の加速度は次のようになる。

$$\ddot{x}=\Sigma\,\{\lambda_r\alpha_{r0}\alpha_r(t)+u_r^T\dot{\beta}_r(t)\}\,\lambda_r u_r \qquad ⑫$$

ここに，$\alpha_{r0}=\alpha_{r10}$

$$\alpha_r(t)=\exp(\lambda_r t)$$

ところでモード定数λ_r、u_rについて共役複素数を考慮すれば、⑫式の加速度$\ddot{x}$は次のようになる。

$$\ddot{x} = 2\,\mathrm{Real}\,\Sigma\,\{\lambda_r\,\alpha_{r0}\alpha_r\,(t) + u_r^{T}\dot{\beta}_r\,(t)\}\,\lambda_r\,u_r,\quad (r=1\sim N) \qquad ⑬$$

2）　ベクトルの決定

ベクトルは固有値λ_rを既知として扱い、測点毎に線形的に解いていく。測点ｊの加速度$\ddot{x}_j$は⑬式より

$$\ddot{x}_j\,(t) = 2\,\mathrm{Re}\,\Sigma\,\{\lambda_r\,\alpha_{r0}\alpha_r\,(t) + u_r^{T}\dot{\beta}_r\,(t)\}\,\lambda_r\,u_{rj} \qquad ⑭$$

上式を既知変数α_r、β_r、f、λ_rについて整理をし、未知変数α_{r0}、u_{rj}を線形的に扱い最小二乗法によって解いていく。以下に誤差評価関数を示す。

$$\varepsilon_j = \Sigma\,(\ddot{x}_{ji}^{\,e} - \ddot{x}_{ji})^2 = \sum_i\,[\ddot{x}_{ji}^{\,e} - 2\,\mathrm{Re}\,\Sigma\,(a_{rj}\,\lambda_r^2\,\alpha_{ri} + \lambda_r\,V_{rj}^{T}\,\dot{\beta}_{ri})]^2 \qquad ⑮$$

ここに、$a_{rj} = \alpha_{r0}u_{rj}$，$V_{rj} = u_{rj}\,u_r$である。また$\ddot{x}_{ji}^{\,e}$は観測値、添字$_i$は時間$t = t_i$を意味する。

3）固有値の決定

加速度$\ddot{x}_{ji}$　はλ_rについて非線形である。そこでテーラー展開の一次までとって線形化を行う。

$$\begin{aligned}\ddot{x}_{ji} &= \ddot{x}_{ji0} + \Sigma\,\partial\ddot{x}_{ji}/\partial\lambda_r\cdot\triangle\lambda_r\\ &= \ddot{x}_{ji0} + 2\,\mathrm{Re}\,\Sigma\,[2\lambda_r\,a_{rj}\,\alpha_{ri} + \lambda_r^2\,a_{rj}\,t_i\,\alpha_{ri}\\ &\quad + V_{rj}^{T}\cdot(2\lambda_r\,\beta_{ri} + \lambda_r^2\,\partial\beta_{ri}/\partial\lambda_r + f_i)]\cdot\triangle\lambda_r\end{aligned} \qquad ⑯$$

上式の$\partial\beta_{ri}/\partial\lambda_r$は数値的に計算可能である。⑪式で両辺を$\lambda_r$で微分すれば次式を得る。

$$\dot{B}_{ri} = \lambda_r\,B_{ri} + \beta_{ri}\quad,\ B_{ri} = \partial\beta_{ri}/\partial\lambda_r \qquad ⑰$$

これより⑯式は次のようになる。

$$\begin{aligned}\ddot{x}_{ji} = \ddot{x}_{ji0} &+ 2\,\mathrm{Re}\,\Sigma\,[2\lambda_r\,a_{rj}\,\alpha_{ri} + \lambda_r^2\,a_{rj}\,t_i\,\alpha_{ri}\\ &+ V_{rj}^{T}\cdot(2\lambda_r\,\beta_{ri} + \lambda_r^2\,B_{ri} + f_i)]\cdot\triangle\lambda_r\end{aligned} \qquad ⑱$$

以上より次式の評価関数を考え正規方程式を立てて$\triangle\lambda_r$について解けば、λ_rの一次微小変化分が得られる。

$$\varepsilon = \sum_{ji}\,(\ddot{x}_{ji}^{\,e} - \ddot{x}_{ji})^2 \qquad ⑲$$

３．計算例

図１、２は１質点系構造物についての振動台実験によるデータを扱った解析例である。点線が実験値、実線が解析値である。図１は初期値がゼロのときの結果であり、図２は強制振動下におけるデータを対象にしたときの結果である。いずれも良好な結果を得ている。

図１では、固有周波数５．１３Hz、減衰定数０．２１％を得、図２では、それぞれ５．０７Hz、０．４８１％を得ている。

加速度応答値　　--- 実験値 — 解析値

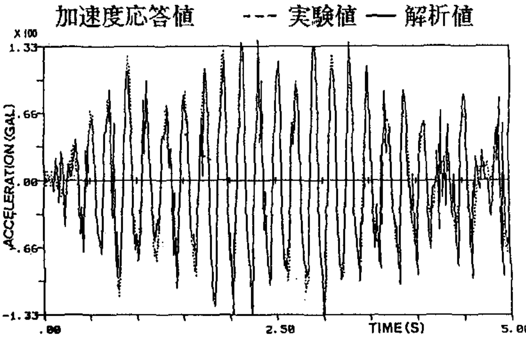

図１．初期値がゼロのとき

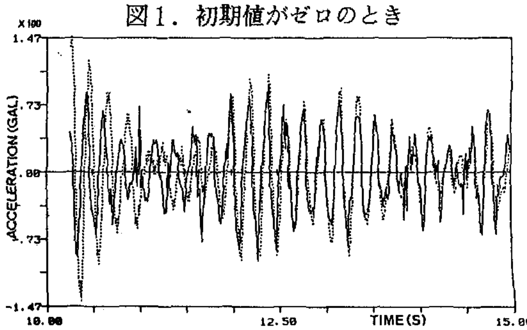

図２．強制振動下において

４．おわりに

この手法は、数値積分を⑪⑰の２式について行なわれなければならず、多少計算に時間を要するが収束性にたいへん優れている。また図２の好結果から地盤等の非線型性問題に言及できる解析能力を持つものと考えている。今後検討していきたい。

計算例で使用した実験値は、清水建設株式会社技術研究所振動グループより御提供いただいた。附して謝意を表します。

参考文献

1）J. L. Beck Determining Models of Structures from Earthquake Records, C. I. T, Pasadena, 1978