I-474　半無限弾性体上の平板の振動に関する研究

埼玉大学工学部　正会員　東原　紘道
○日本道路公団　正会員　板橋　友彦

１．研究の目的

構造物の耐震設計において、建物と地盤の相互作用効果は重要な問題である。その半無限弾性体上の平板の動的コンプライアンス問題は、その理論的基礎を与えるものである。本研究は、この問題を任意形状板を対象として定式化するものである。

２．理論式

半無限弾性体上に構造物が存在する場合、接触圧分布はＧｒｅｅｎ関数を用いて得られる次式(1) の積分方程式を解くことによって求まる。

$$U_i(x, y) = \Sigma \iint_S G_{ij}(x, y | X, Y) \cdot T_j(X, Y) dXdY \tag{1}$$

ここに、U は変位、T は加振力を示す。

本研究では、接触面 S を三角形要素に分割し、要素内の応力は一次変化するものと仮定した。さらに、極座標に変換して、式(1) を表すと次式(2) のように書くことができる。

$$U_i(x, y) = \Sigma \int \Theta_{(\theta)} d\theta \int (r\cos\theta, r\sin\theta, 1) rU_{(r)}\ dr \left[A\right] \left\{\tilde{T}\right\} \tag{2}$$

ここで、$\tilde{T}$ は、三角形要素の３頂点の応力ベクトル、$\left[A\right]$ は応力分布が一次変化するとした場合の係数ベクトル $U_{(r)}$ と $\Theta_{(\theta)}$ は、Ｌａｍｂの点加振解から求められる．$r^2U_{(r)}$ ， $rU_{(r)}$ は r のみの関数であり、あらかじめ積分することができる。

次に、$U_{(r)}$ の積分について説明する。これには次のような積分が含まれる。

$$A_m = b^2 \int_0^\infty k \frac{\sqrt{k^2-b^2}}{F(k)} J_m(rk)\ dk \qquad m=0\sim 2 \tag{3}$$

$$B_m = \int_0^\infty \frac{k}{\sqrt{k^2-b^2}} J_m(rk) dk \tag{4}$$

$$C = \int_0^\infty k \frac{\sqrt{k^2-a^2}}{F(k)} J_0(rk) dk \tag{5}$$

$$D = \int_0^\infty k^2 \frac{(2k^2-b^2) - 2\sqrt{(k^2-a^2)(k^2-b^2)}}{F(k)} J_1(rk) dk \tag{6}$$

ここに、$a=\omega/V_P$, $b=\omega/V_S$ ，V_P と V_S は弾性波の速度である。また J_m は m 次のベッセル関数である
これらの無限積分を実行すると次のようになる。

$$\int_0^r A_m\ dr = -(1-\nu)r + br^2 \left\{ -\pi i \frac{\kappa\sqrt{\kappa^2-1}}{F'(\kappa)} H_{m1}(b\kappa r) + i\int_0^r \frac{\xi\sqrt{1-\xi^2}}{F_1+F_3} H_{m1}(b\xi r)\ d\xi + i\int_r^1 \frac{\xi\sqrt{1-\xi^2}}{F_1^2+F_2^2} F_1 H_{m1}(b\xi r)\ d\xi \right\} \tag{7}$$

$$\int_0^r rB_m\,dr = r - ibr^2\int_0^1 \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}H_{m2}(br\xi)\,d\xi \tag{8}$$

$$\int_0^r rC\,dr = (1-\nu)r - br^2\left\{-\pi i\frac{\kappa\sqrt{\kappa^2-\gamma^2}}{F'(\kappa)}H_{01}(b\kappa r) + i\int_0^\gamma \frac{\xi\sqrt{\gamma^2-\xi^2}}{F_1+F_3}H_{01}(b\xi r)\,d\xi + i\int_\gamma^1 \frac{\xi\sqrt{\xi^2-\gamma^2}}{F_1^2+F_2^2}F_2H_{01}(b\xi r)\,d\xi\right\} \tag{9}$$

$$\int_0^r rD\,dr = -\pi i\kappa^2\frac{(2\kappa^2-\gamma^2) - 2\sqrt{(\kappa^2-1)(\kappa^2-\gamma^2)}}{F'(\kappa)}H_{11}(\kappa r) + i\int_\gamma^1 \xi^2\frac{(2\xi^2-\gamma^2)F_2 - 2\sqrt{(\gamma^2-\xi^2)(\xi^2-1)}F_1}{F_1{}^2+F_2{}^2}H_{11}(\xi r)d\xi \tag{10}$$

ここで、

$$F(\xi) = (2\xi^2-1)^2 - 4\xi^2\sqrt{\xi^2-\gamma^2}\sqrt{\xi^2-1}$$

$$F_1(\xi) = (2\xi^2-1)^2$$

$$F_2(\xi) = 4\xi^2\sqrt{\xi^2-\gamma^2}\sqrt{1-\xi^2}$$

$$F_3(\xi) = 4\xi^2\sqrt{\gamma^2-\xi^2}\sqrt{1-\xi^2}$$

$b = \omega/V_S \quad \gamma = \sqrt{(1-2\nu)/(2-2\nu)}$　　ν はポアソン比、

r^2 をかけた場合は、r の項を $\frac{r^2}{2}$ に、H_{m1} を H_{m2}にかえる。 m=0~2 である。H_{m1}，H_{m2} 定積分で表示される特殊関数である。

以上により、任意形状の平板のコンプライアンスおよび応力を精度よく求めることが可能となる。

3．結果の検証

上記の方法をプログラム化し計算した結果、円形および矩形板の水平モードと鉛直モードのコンプライアンスおよび応力について十分妥当な結果が得られた。