

I-377

面内変動曲げを受ける曲線平板構造の動的安定性

長崎大学工学部 学生員 ○平川倫明

長崎大学工学部 正 員 高橋和雄

佃片山鉄工所 正 員 夏秋義広

1. まえがき 曲線平板構造は、アーチ橋の腹板、ラーメンの隅角部など構造部材として多用されている。曲線平板構造の曲げ問題はかなり詳しく解析されているが¹⁾、動的問題、特に動的安定性についての研究はほとんど行なわれていない。そこで、本研究は面内変動曲げを受ける曲線平板構造の動的安定性を解析的に明らかにするものである。

2. 基礎式および境界条件 図-1に示すように、曲線平板構造の基本構造として、外径 a 、内径 b で、開き角 α の扇形板を考える。この扇形板の直線辺に、静的曲げモーメント M_0 と変動曲げモーメント $M_t \cos \Omega t$ の和からなる曲げモーメント M が作用する。この場合の平板内の面内力 $N_r, N_\theta, N_{r\theta}$ は平面応力問題として求めることができる²⁾。

この扇形板の面外曲げ振動の運動方程式は次のように表すことができる。

$$L(w) = D \nabla^4 w + \rho d \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r N_r \frac{\partial w}{\partial r}) \quad (1)$$

$$+ \frac{N_\theta}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} = 0$$

ここに、 $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$ 、 D : 板剛度、

ρ : 板の密度、 d : 板厚、 $N_r = (M_0 + M_t \cos \Omega t) f_1(r)$ 、 $N_\theta = (M_0 + M_t \cos \Omega t) f_2(r)$

境界条件として、次の3ケースについて考える。case I : 荷重辺単純支持, 他辺自由; case II : 荷重辺単純支持, 他辺単純支持; case III : 荷重辺単純支持, 他辺固定。

3. 解法 式(1)の解を次のように仮定する。

$$w = \sum_{i,j} T_{in}(t) W_{in}(r, \theta) \quad (2)$$

ここに、 $T_{in}(t)$: 未知の時間関数、 $W_{in}(r, \theta)$: 境界条件を満足する座標関数。

式(2)の座標関数として、対応する扇形板の固有振動形³⁾を用い、式(1)にGalerkin法を適用すれば、次のような時間関数に関する運動方程式が得られる。

$$[I] \{\ddot{T}_n\} + [A] \{T_n\} + (\bar{M}_0 + \bar{M}_t \cos \omega \tau) [B] \{T_n\} = \{0\} \quad (3)$$

ここに、 $[I]$: 単位行列、 $[A]$: 対角行列、 $[B]$: 正行列、 $\{T_n\} = \{T_{1n} T_{2n} \cdots T_{Nn}\}^T$

なお、上式の荷重項は対応する座屈荷重 M_{cr} で、また、時間は1次の固有円振動数 ω_1 で、無次元化されている。すなわち、

$$\text{荷重: } \bar{M}_0 = M_0 / M_{cr}, \quad \bar{M}_t = M_t / M_{cr} \quad \text{時間: } \tau = \omega_1 t, \quad \bar{\omega} = \Omega / \omega_1 \quad (4)$$

式(3)の解を次のように仮定する。

$$\{T_{in}\} = e^{\lambda \tau} \left\{ \frac{1}{2} b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin n \bar{\omega} \tau + b_n \cos n \bar{\omega} \tau) \right\} \quad (5)$$

ここに、 b_0, a_n, b_n : 未知のベクトル、 λ : 未定定数。

式(5)を式(3)に代入して、調和バランス法を適用すれば、未定定数 λ を定めるための代数方程式が得られ、これを行列の固有値問題⁴⁾に変換することによって、安定性を判定することができる。これより扇形

板の内外径比 $\xi_0 = b/a$ 、開き角 α のもとに、各種の境界条件をもつ扇形板の動的安定性が明らかにされる。

4. 数値結果 (1) 固有振動特性

図-2はcase IIの扇形板 ($\xi_0 = 0.313, \alpha = 60^\circ, \nu = 0.3$) の静的曲げモーメント $\bar{M}_0$ と固有振動数比 $\bar{n}$ の関係である。横軸は1次の固有振動数で無次元化した固有振動数比 $\bar{n} = \omega^{n_s} / \omega_1$ である。図中の記号 (n, s) は θ 方向の半波数 n 、半径方向の半波数 s をもつ固有振動形を意味する。 $n=1$ の場合、固有振動数は低下するが、 n が1以外では半径方向の半波数 s によって異なる。

図-3のように、固有振動形と座屈波形は一致しないために、結合共振が生ずることが予想される。

(2) 不安定領域 図-4, 5は case I, II の扇形板 ($\xi_0 = 0.313, \alpha = 60^\circ, \nu = 0.3, \bar{M}_0 = 0.0$) の面外不安定領域である。図中の横軸 $\bar{\omega}$ は加振振動数を、縦軸 $\bar{M}_t$ は変動曲げモーメントの振幅である。

図中の右下がりの斜線部が結合共振を、右上がりの斜線部が単純共振を意味する。不安定領域に示した記号 $2\omega^{n_1}/k, (\omega^{n_1} + \omega^{n_2})/k$ はそれぞれ単純共振、結合共振を意味する。図-4, 5のように、扇形板の場合には、単純共振の不安定領域が結合共振のそれよりも広い。いずれの場合にも $k=1$ に対する主不安定領域の幅が広く、 $k \geq 2$ の副不安定領域の幅は無視できるほど狭い。また、境界条件によって不安定領域の種類および幅が大いに異なると言える。この原因は固有振動特性および座屈特性が境界条件によって異なるためである。

5. まとめ 他の境界条件、内外径比、開き角および初期曲げモーメントの影響は、講演時に発表する。

参考文献

- 1) 岡村・石川：土木学会論文集，第374号/I-6、1986年10月、pp.379-388、2) 小松：構造解析学、丸善、1986年7月、pp.52-54、3) 山崎・樺木・金子：九州大学工学集報、第42巻、第4号、1969年8月、pp.576-583、4) Takahashi, K.: Journal of Sound and Vibration, Vol. 8, 1982, pp.257-262.

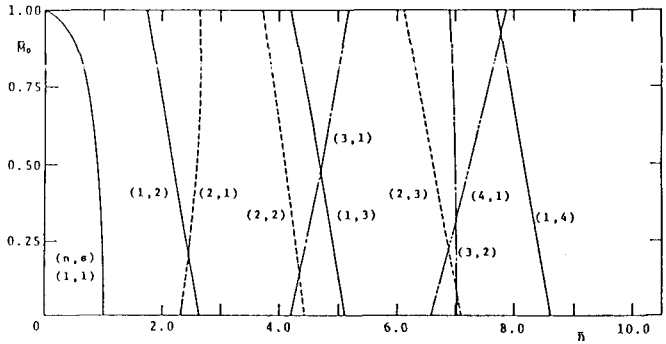


図-2 固有円振動数 ω^{n_s} に及ぼす
静的曲げモーメント $\bar{M}_0$ の影響 (case II)

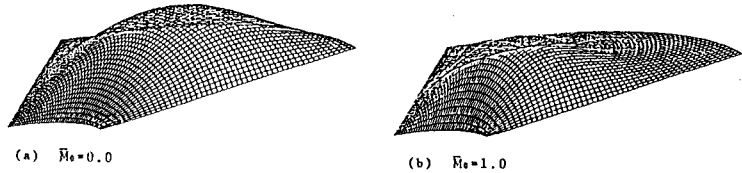


図-3 1次の固有振動形と座屈波形

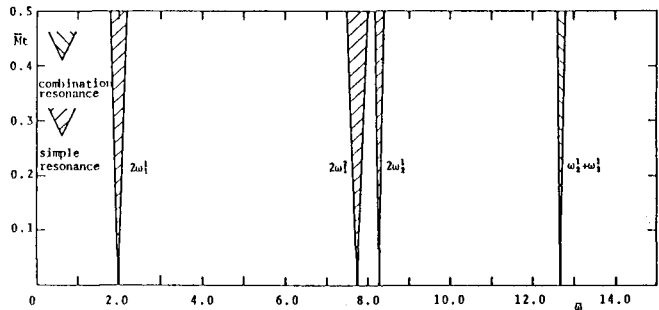


図-4 不安定領域 (case I, $\bar{M}_0 = 0.0$)

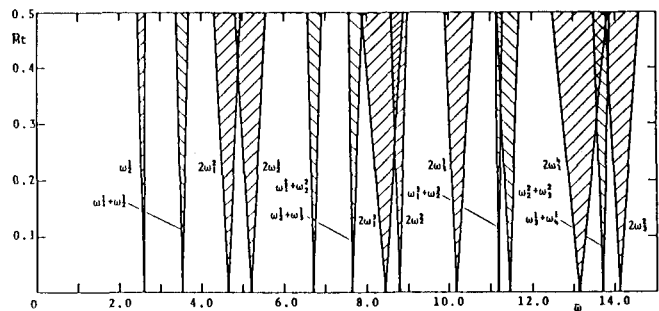


図-5 不安定領域 (case II, $\bar{M}_0 = 0.0$)