

I-376

## 非線形振動における高調波共振の影響

日本大学生産工学部 正 員 能町純雄

日本大学生産工学部 正 員 木田哲量

日本大学生産工学部 正 員 阿部 忠

日本大学生産工学部 学 員 ○横江英彦

## 1. はじめに

構造物が振動を受けた場合、ある振動に対して共振(共鳴)現象なる振動現象が現れてくる。一般に非線形振動の共振現象には、高調波共振と分調波共振の2つの現象が主共振と共に発生する。これについては、粘性減衰を伴わない場合について解析的に研究が多くなされている。そこで、構造体が粘性を有する場合の非線形振動における高調波共振の影響について考察する。

粘性を有する非線形構造体に調和せん断振動を強制入力させた場合には式(1)に示すダフィング形の運動方程式となる。

$$m\ddot{r} + \mu\dot{r} + G\left(r - \frac{r^3}{3r_0^2}\right) = P \sin(\omega t + \alpha) \quad (1)$$

ここで、 $m$ ；構造体の質量、 $r$ ；ひずみ、 $\mu$ ；構造体の粘性係数、 $G$ ；構造体の弾性係数、 $r_0$ ； $\partial \tau / \partial r = 0$ の時のずみ値、 $P$ ；調和せん断力、 $\omega$ ；調和せん断力の周波数、 $t$ ；時間、 $\alpha$ ；調和せん断力の位相差、

さて、強制せん断振動を受けた構造体に生ずるひずみ $r$ は、高調波共振現象を考慮する立場から式(2)のように仮定する。

$$r = r_1 \sin \omega t + r_3 \sin(3\omega t + \beta) \quad (2)$$

ここで、 $r_1$ ； $\sin \omega t$ の係数、 $r_3$ ； $\sin(3\omega t + \beta)$ の係数

## 2. 高調波共振スペクトル

式(1)には $r^3$ の項が存在することから、式(2)の3乗を展開し、調和平衡法に従って $\omega$ の3倍角までを採用することとする。

$$\begin{aligned} r = & \frac{r_1^3}{4} (3 \sin \omega t - \sin 3\omega t) + \frac{3r_1^2 r_3}{2} \times \{ \sin(3\omega t + \beta) \\ & - \frac{1}{2} \sin(\omega t + \beta) \} + \frac{3r_1 r_3^2}{2} \sin \omega t + \frac{3r_3^3}{4} \sin(3\omega t + \beta) \end{aligned} \quad (3)$$

よって、式(3)を式(1)に代入し、両辺を $G r_0$ で除して式(4)を得る。

$$\begin{aligned} - & \frac{m\omega^2 r_1}{G r_0} \sin \omega t - \frac{\mu\omega r_1}{G r_0} \cos \omega t + \frac{r_1}{r_0} \sin \omega t - \frac{9m\omega^2 r_3}{G r_0} \sin(3\omega t + \beta) \\ & - \frac{3\mu\omega r_3}{G r_0} \cos(3\omega t + \beta) - \frac{r_1^3}{4r_0^2} \sin \omega t + \frac{r_3}{r_0} \sin(3\omega t + \beta) \\ & + \frac{r_1^3}{12r_0^2} \sin 3\omega t - \frac{r_1^2 r_3}{2r_0^2} \sin(3\omega t + \beta) - \frac{r_1 r_3^2}{2r_0^2} \sin \omega t \\ & + \frac{r_1^2 r_3}{4r_0^2} \sin(\omega t + \beta) - \frac{r_3^3}{4r_0^2} \sin(3\omega t + \beta) \\ & - \frac{P}{G r_0} \cos \alpha \sin \omega t - \frac{P}{G r_0} \sin \alpha \cos \omega t = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

ここで、式(4)を恒等式と見なすと、 $\sin \omega t$ ,  $\cos \omega t$ ,  $\sin(3\omega t + \beta)$ ,  $\cos(3\omega t + \beta)$ の係数から、次の各式を得る。

$$\eta_1 \left( 1 - \frac{1}{4} \eta_1^2 - \xi^2 + \frac{1}{4} \eta_1 \eta_3 \cos \beta - \frac{1}{2} \eta_3^2 \right) = p \cos \alpha t \quad (5)$$

$$\eta_1 \left( 2h\xi + \frac{1}{4} \eta_1 \eta_3 \sin \beta \right) = p \sin \alpha t \quad (6)$$

$$\eta_3 \left( 1 - \frac{1}{4} \eta_3^2 - 9\xi^2 + \frac{1}{12\eta_3} \eta_1^2 \cos \beta - \frac{1}{2} \eta_1^2 \right) = 0 \quad (7)$$

$$6h\xi\eta_3 - \frac{1}{12} \eta_1^2 \sin \beta = 0 \quad (8)$$

よって、式(5), (6), (7), (8)から粘性を考慮した場合の高調波共振を示す周波数スペクトルの式(9)と(10)を次のように得ることができる。

$$\begin{aligned} \eta_1^6 \left( \frac{9}{16} n^8 + \frac{3}{2} n^6 + \frac{1}{4} n^4 + \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{16} \right) + \frac{1}{2} \eta_1^4 (81\xi^2 n^6 + 105\xi^2 n^4 \\ - 23\xi^2 n^2 + \xi^2 - 9n^6 - 9n^4 + 7n^2 - 1) + \eta_1^2 (729\xi^4 n^4 - 54\xi^4 n^2 + \xi^4 - 162\xi^2 n^4 \\ + 324h^2\xi^2 n^4 + 4h^2\xi^2 + 72h^2\xi^2 n^2 + 60\xi^2 n^2 - 2\xi^2 + 9n^4 - 6n^2 + 1) = p^2 \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \eta_1^6 \left( \frac{1}{16} n^6 + n^4 + \frac{1}{4} n^2 - \frac{1}{144} \right) + \eta_1^4 \left( \frac{1}{2} n^4 + \frac{1}{2} n^4 \xi^2 + 9n^2 \xi^2 - n^2 \right) \\ + \eta_1^2 (81\xi^4 n^2 - 18\xi^2 n^2 + 36h^2\xi^2 n^2 + n^2) = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

上式中、 $\xi^2 = \frac{m\omega^2}{G}$ ,  $p = \frac{P}{Gr_0}$ ,  $\eta_1 = \frac{r_1}{r_0}$ ,  $\eta_3 = n\eta_1$ ,  $\eta_3 = \frac{r_3}{r_0}$ ,  $2h\xi = \frac{\mu\omega}{G}$

そこで、式(9)と(10)における $p$ ,  $h$ ,  $n$ ,  $\eta_1$ をパラメータとした場合の周波数スペクトル曲線の1例を図-1に示す。これによると、ひずみ比が、 $0 < n \leq 0.0295$ の範囲内において両式は常に根を有する、すなわち高調波成分の影響が現れている。さらに、上記範囲における交点の軌跡は図-2のようであり、式(2)中第2次高調波成分を無視した場合の周波数スペクトル曲線とほぼ一致することが判明した。

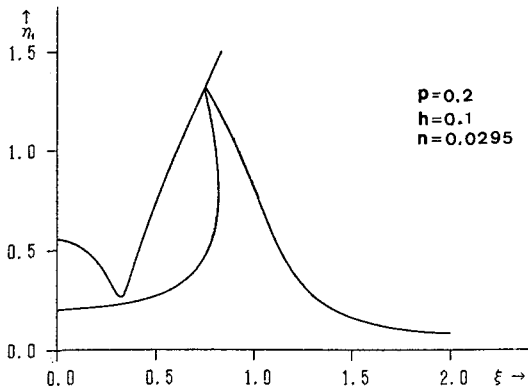


図-1 周波数スペクトル曲線

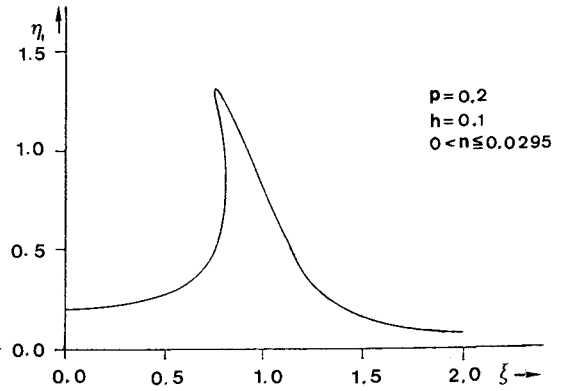


図-2 共振点曲線

参考文献 1) 入江敏博: 演習機械振動学; 昭和61年, 朝倉書店, P.P. 223~224

2) 土木学会: 土木技術者のための振動便覧; 昭和60年, 土木学会

3) 土木学会編: 能町純雄, 木田哲量, 澤野利章 "非線形フォークト体のせん断振動について" ; 昭和61年11月, 土木学会第41回学術講演概要集第1部I-354, P.P. 707~708