

○東京工業大学 学生員 飯島政義
東京工業大学 正員 野村卓史

1. はじめに

有限要素法を用いて非定常非圧縮性粘性流れを解析する場合、必要とされる計算機の記憶領域、及び、トータル計算時間を抑えることは重要なことである。時間積分にオイラー法を用いると、要する計算機の記憶領域が少なく済む反面、積分時間間隔 Δt の安定限界は厳しく、陰的な時間積分公式に基づく解法に比べ Δt を小さくとらねばならない。Greshoらは、計算量を低減するためにSubcyclingという技法、 Δt の安定限界を上げるためにBalancing Tensor Diffusivity法(BTD法)の適用、を提案している。¹⁾ ここでは、これらの技法の効果や解に及ぼす影響について報告する。

2. 検討した解析過程

Navier-Stokes 方程式と非圧縮の連続条件式を支配方程式とし、これらを流速線形分布、圧力一定分布の要素を用いて、ガラーキン有限要素法により空間方向に離散化を行い式(1)、(2)を得る。

$$M \cdot \dot{u} + K_a(u) \cdot u + K_\mu \cdot u + K_p \cdot p = f \quad (1)$$

$$K_p^T \cdot u = 0 \quad (2)$$

式(1)の時間積分にオイラー法を用い、さらに式(2)を適用して、オイラー法による基本的な積分漸化関係式(3)、(4)を得る。これら2式より、ステップごとに圧力と流速を求めていく。(解析過程1)

$$(K_p^T \cdot M^{-1} \cdot K_p) \cdot p_n = K_p^T \cdot M^{-1} (f_n - K_a(u_n) \cdot u_n - K_\mu \cdot u_n) \quad (3)$$

$$u_{n+1} = u_n + \Delta t \cdot M^{-1} (f_n - K_a(u_n) \cdot u_n - K_\mu \cdot u_n - K_p \cdot p_n) \quad (4)$$

解析過程1では、ステップごとに圧力を求めるための連立一次方程式(3)を解かねばならない。そこで、数ステップの間は、圧力の時間変化が直線的であると仮定し、式(3)を解くことなしに、式(4)のみにより積分計算を進め、連立一次方程式を解く回数を減らして計算量の低減を図る技法がSubcyclingである。概略を図1に示す。Subcyclingを経て求まる流速 $\tilde{u}$ は、連続条件を満たしていないので、これを満たすように流速の補正をラグランジュの未定乗数法により行う。

$$F(u^*, \lambda) = \frac{1}{2} (u^* - \tilde{u})^T \cdot M \cdot (u^* - \tilde{u}) + \lambda^T \cdot K_p^T \cdot u^* \rightarrow \text{stationary} \quad (5)$$

すなわち、補正流速 u^* は次式より求まる。

$$(K_p^T \cdot M^{-1} \cdot K_p) \cdot \lambda = K_p^T \cdot \tilde{u} \quad (6, a)$$

$$u^* = \tilde{u} - M^{-1} \cdot K_p \cdot \lambda \quad (6, b)$$

この補正流速 u^* を用いて、式(3)の関係より圧力 p^* を求める。なお、Subcyclingの回数は加速度の打ち切り誤差を評価して決められ、流れの変化が激しい状態ではこの回数は少なく、一方、流れが定常となるような場合には、この回数は次第に増すのである。(解析過程2)

BTD法は、オイラー法による加速度の打ち切り誤差を補正し、 Δt の安定限界を上げようとするものである。すなわち、オイラー法で打ち切られる流速の時間に関する2階微分の項が、空間に関する2階微分の項で近似できることを利用したものであり、結果として、式(1)における粘性に関するマトリックス K_μ のうちの粘性テンソル D_{ij} を式(7)に示すように人工粘性項を付加したものに置き換える技法である。(解析過程3)

$$D_{ij}^* = D_{ij} + \frac{1}{2} \Delta t \cdot \rho \cdot u_{i,j} \cdot u_{j,i} \quad (7)$$

3. 数値解析例

カルマン渦列が生じる迎え角ゼロの正方形角柱まわりの流れを、以上の解析過程1～3により図2の対象領域のもとで解析した。角柱の辺長を基準としたレイノルズ数は150である。表1にはストローハル数、

及び、1ステップあたりに換算した計算時間(CPU time)を記す。図3は、角柱に生じる揚力が最大となる時の流速ベクトル図である。カルマン渦列が生じている状態において、解析過程1と解析過程2とでは、求まる解に大差はなく、ストローハル数も同じ値である。しかし、解析過程3では、人工粘性の効果のために流速ベクトルの分布はより滑らかになり、ストローハル数は小さくなっている。そして、解析過程1と2では解が分散し計算が成立し得なかった積分時間間隔でも計算が成立しており、安定限界が上がっている。しかし、式(7)の第2項から類推されるように、 Δt が長くなったことにより人工粘性も増し、ストローハル数はさらに小さくなった。

1ステップあたりの計算時間を比較した場合、解析過程3は式(7)により $K\mu$ をステップごとに作成しているため解析過程1より長い時間を要する。又、解析過程2において、カルマン渦列が生じている状態ではSubcyclingの回数は常に4回であり、連立一次方程式を解くための後退代入は4ステップで式(3)、(6,a)の2回行われている。この場合、連立一次方程式を解く回数は減ったが、表1の注)に示される様に、後退代入の時間はわずかであり、ステップごとに行われる非線形マトリックス $Ka(u)$ の作成にかなりの時間を要するため、トータルの計算時間短縮の効果はさほど大きくはない。

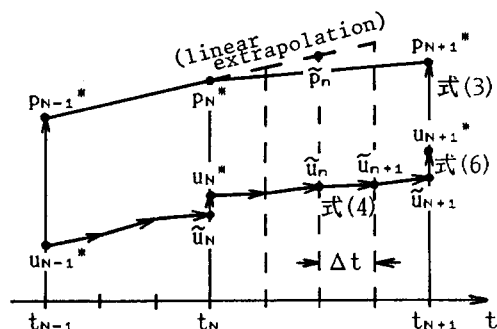


図1. Subcyclingの概略

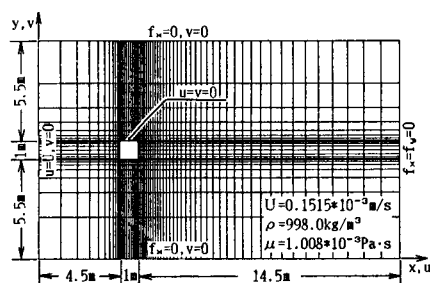


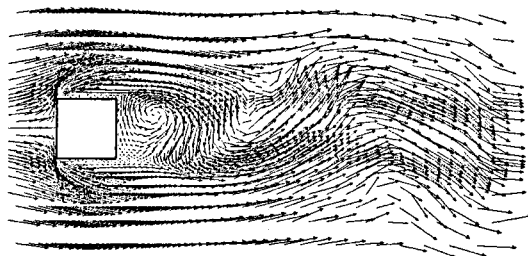
図2. 解析領域

表1. ストローハル数, 及び, 1ステップあたりの所要計算時間 (Δt^* : 無次元積分時間間隔)

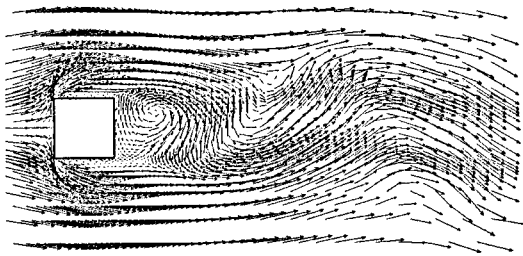
	ストローハル数		1ステップあたりの計算時間	計算時間の内訳
	$\Delta t^* = 0.02$	$\Delta t^* = 0.04$		
解析過程 1	0.167	発散	1.20 sec	ステップごとに①+③+④
解析過程 2	0.167	発散	0.96 sec	4ステップに③, ④を2回, ①を4回
解析過程 3	0.152	0.144	1.47 sec	ステップごとに①+②+③+④

注) ①: $Ka(u)$ の作成(0.61 sec), ②: $K\mu$ の作成(0.27 sec)

③: $K_p \cdot p$ の演算 (0.52 sec), ④: 後退代入 (0.02 sec)



a) 解析過程 1



b) 解析過程3

図3. 角柱付近の流速ベクトル図(揚力最大時, $\Delta t^* = 0.02$)

参考文献: 1) P.M.Gresho et.al; A modified finite element method for solving the time-dependent incompressible Navier-Stokes equations, Part1&2, Int.J.Num.Meth.Fluids, Vol.4, 1984