

神戸大学 学○庄 健介 鹿島建設 寺村文伸
神戸大学 正 北村泰寿

まえがき 本研究は、Biot¹⁾ の提案した空隙を有する弾性骨格と間隙水の2相連成系モデルで表される半無限飽和弾性体表面の調和型点加振力による表面変位解の誘導を行い、若干の数値計算例を示したものである。

定式化 図-1に示すように、 $z \geq 0$ を占める半無限飽和弾性体の表面に調和型点加振力が作用する場合を考える。半無限飽和弾性体は、空隙を有する弾性骨格(以下、有孔弾性体と称する²⁾)と空隙を完全に満たす液体から構成されている。有孔弾性体は、巨視的に見て等方均質であり、いずれの方向に断面を切り出してもその断面の間隙率は一定であるとする。液体は非粘性とし、弾性波の消散については考えない。また、液体は圧縮性であると仮定する。有孔弾性体の素材で構成される弾性体を母材弾性体と呼ぶことにし、間隙率が零の有孔弾性体は母材弾性体の力学特性と同じであるとして取り扱う。

有孔弾性体と液体の相互作用を考慮した飽和弾性体の応力-ひずみ関係と運動方程式は次式のように表される。

$$\sigma_{ij} = 2N e_{ij} + (A e + Q \varepsilon) \delta_{ij} \quad (1)$$

$$\sigma_p = Q e + R \varepsilon \quad (2)$$

$$N \nabla^2 u + \text{grad}\{(A+N)e + Q\varepsilon\} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_{11} u + \rho_{12} U) \quad (3)$$

$$\text{grad}(Q e + R \varepsilon) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_{12} u + \rho_{22} U) \quad (4)$$

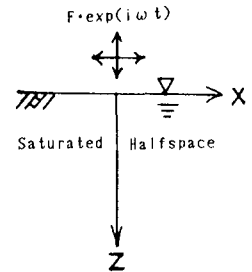


図-1 解析モデル

ここで、 σ_{ij} 、 e_{ij} ($i, j = x, y, z$) は有孔弾性体の応力、ひずみ成分、 σ_p は液体の応力、 e 、 ε は有孔弾性体および液体の体積ひずみ、 N はせん断弾性係数、 A はラーメの定数、 Q は有孔弾性体と液体の体積変化の間に起こる相互作用に関する係数、 R は主に液体の圧縮剛性に関する係数である。なお、 A 、 Q 、 R は有孔弾性体のポアソン比、圧縮率、間隙率、空隙の圧縮率、液体の圧縮率等より決定される係数である。 ρ_{11} は液体の影響を考慮した有孔弾性体の質量、 ρ_{12} は有孔弾性体と液体の連成効果を表す質量、 ρ_{22} は有孔弾性体の影響を考慮した液体の質量で、飽和弾性体の質量を ρ とするとき、 $\rho = \rho_{11} + 2\rho_{12} + \rho_{22}$ であるとする。また、 u 、 U は有孔弾性体および液体の変位ベクトルで、 $u = (u_x, u_y, u_z)$ 、 $U = (U_x, U_y, U_z)$ とし、スカラーポテンシャル ϕ 、 ψ 、ベクトルポテンシャル H 、 G を用いて次式のように表される。

$$u = \text{grad} \phi + \text{curl} H, \quad U = \text{grad} \psi + \text{curl} G \quad (5)$$

いま、式(5)を式(3)、(4)に代入して発散成分と回転成分に分解するとつぎのようになる。

$$P \nabla^2 \phi + Q \nabla^2 \psi = \rho_{11} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \rho_{12} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (6) \quad N \nabla^2 H = \rho_{11} \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} + \rho_{12} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} \quad (8)$$

$$Q \nabla^2 \phi + R \nabla^2 \psi = \rho_{12} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \rho_{22} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (7) \quad 0 = \rho_{12} \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} + \rho_{22} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} \quad (9)$$

ここで、 $P = A + 2N$ である。また、応力成分をポテンシャル ϕ 、 ψ 、 H 、 G を用いて表示すると次式のようになる。

$$\begin{aligned} \sigma_{zz} &= 2N \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 H_y}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 H_x}{\partial y \partial z} \right) + A \nabla^2 \phi + Q \nabla^2 \psi, & \sigma_p &= Q \nabla^2 \phi + R \nabla^2 \psi \\ \tau_{yz} &= N \left(2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 H_z}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 H_y}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (10)$$

$$\tau_{xz} = N(2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 H_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2})$$

つぎに、図-1において、原点に調和型点加振力が作用するとき、境界条件は次式となる。

$$\langle \text{鉛直点加振} \rangle \quad \sigma_p = 0, \quad \sigma_{zz} = -F_z \cdot \exp(i\omega t), \quad \tau_{yz} = 0, \quad \tau_{zx} = 0 \quad (11)$$

$$\langle \text{水平点加振} \rangle \quad \sigma_p = 0, \quad \sigma_{zz} = 0, \quad \tau_{yz} = 0, \quad \tau_{zx} = -F_x \cdot \exp(i\omega t)$$

ここで、 F_x 、 F_z は加振力振幅である。式(6)～(9)を x 、 y に関して二重フーリエ変換すれば z に関する常微分方程式が得られる。ここで、得られたポテンシャルを式(5)、(10)に代入し、上式の境界条件を適用することによって、像空間での変位、応力解の未知係数が定められる。さらに、この変位、応力解に二重フーリエ逆変換を施せば、実空間での所要の変位、応力解を求めることができる。以下に、円柱座標系に変換した有孔弾性体の表面変位解を示す。なお、調和振動を対象としているので、時間項 $\exp(i\omega t)$ は省略する。

$$u_r = \frac{F_z}{2\pi N} \int_0^\infty \frac{k^2}{F(k)} \{ (2k^2 - \delta_3^2) - 2r_3 \frac{\gamma_1 - L\gamma_2}{1-L} \} J_1(kr) dk \quad (12)$$

$$u_z = - \frac{F_z}{2\pi N} \int_0^\infty \frac{k}{F(k)} \cdot \frac{(\gamma_1 - L\gamma_2)\delta_3^2}{1-L} J_0(kr) dk \quad (13)$$

$$u_x = \frac{F_x}{4\pi N} \int_0^\infty k \left[\frac{F(k) - \gamma_3^2 \delta_3^2}{\gamma_3 F(k)} J_0(kr) + \cos 2\theta \frac{F(k) + \gamma_3^2 \delta_3^2}{\gamma_3 F(k)} J_2(kr) \right] dk \quad (14)$$

$$u_y = \frac{F_x}{2\pi N} \sin \theta \cos \theta \int_0^\infty \frac{k \{ F(k) + \gamma_3^2 \delta_3^2 \}}{\gamma_3 F(k)} J_2(kr) dk \quad (15)$$

$$u_z = - \frac{F_x}{2\pi N} \cos \theta \int_0^\infty \frac{k^2}{F(k)} \{ (2k^2 - \delta_3^2) - 2r_3 \frac{\gamma_1 - L\gamma_2}{1-L} \} J_1(kr) dk \quad (16)$$

$$\text{ただし、} F(k) = (2k^2 - \delta_3^2)^2 - 4k^2 r_3 (\gamma_1 - L\gamma_2) / (1-L) \quad (17)$$

$$L = \frac{\delta_1^2(Q + \mu_1 R)}{\delta_2^2(Q + \mu_2 R)} \quad (18) \quad \mu_j = \frac{\rho_{11}R - \rho_{12}Q - (PR - Q^2)\delta_j^2/\omega^2}{\rho_{22}Q - \rho_{12}R} \quad (j=1,2) \quad (19)$$

ここで、 $k^2 = \alpha^2 + \beta^2$ 、 $\gamma_j = \alpha^2 + \beta^2 - \delta_j^2$ ($j=1,2,3$)、また α 、 β は像空間の座標（波数）、 ω は円振動数、 δ_1 、 δ_2 はP波の波数、 δ_3 はS波の波数、 $J_0(\)$ 、 $J_1(\)$ 、 $J_2(\)$ はベッセル関数である。

計算結果 数値計算にあたり、つぎのようなパラメータを導入し、変位解の無次元化を行った。

$$V^2 = N/\rho, \quad kv = \omega/V, \quad a_0 = \omega r/V, \quad \zeta = k/k_v$$

また、表-1の材料定数を用いて諸弾性係数を設定した³⁾。紙面の都合上、一例として鉛直点加振による母材弾性体、有孔弾性体および飽和弾性体の鉛直変位を比較したものを図-2に示す。なお、有孔弾性体と飽和弾性体の間隙率はともに $\beta = 0.48$ で一定である。同図より、飽和弾性体の変位は、有孔弾性体および母材弾性体の変位と差異を生じており、その差異は加振振動数が高くなるとともに大きくなる傾向を示している。他の変位成分に対する結果等については講演当日に譲る。

文献

- 1) Biot : J. Acous. Soc. Am., Vol.28, 1956.
- 2) 小堀・立川 : 日本建築学会論文集, 第220号, 1974.
- 3) Biot & Willis : J. Appl. Mech., ASME, Vol.24, 1957.

表-1 材料定数

母材弾性体のポアソン比 (ν_s)	0.493
母材弾性体の圧縮率 (C_s)	1.431×10^{-11} (cm^2/dyn)
液体の圧縮率 (C_f)	1.604×10^{-10} (cm^2/dyn)
空隙の圧縮率 (C_p)	9.499×10^{-10} (cm^2/dyn)
母材弾性体の密度 (ρ_s)	2.722×10^{-3} (g/cm^3)
液体の密度 (ρ_f)	1.013×10^{-3} (g/cm^3)

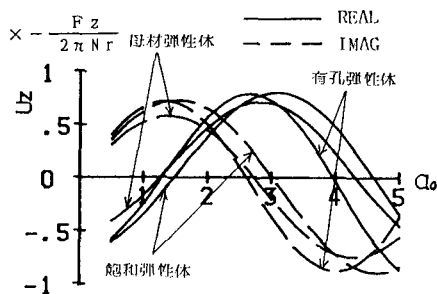


図-2 鉛直点加振による鉛直変位