

熊本工業大学 正員 ○上杉 真平
熊本大学工学部 正員 大津 政康

1. はじめに

境界要素法(BEM)は、地盤のような半無限領域の問題に対して有効である反面、不均質な領域には適用しにくいという欠点がある。そこで、本研究では、実際の複雑な地盤において、不均質な特性をもつ部分を有限要素法(FEM)で、それを囲む均質とみなせる領域をBEMでモデル化し、両者の特徴を生かした結合解法の定式化を試みた。著者らは、これまで面外問題についてその妥当性を検討してきたが¹⁾²⁾、ここでは、さらに本手法を半無限領域における面内問題に適用しその有用性を示す。

2. 定式化

対象とする領域が均質、等方かつ線形の弾性体であるとして平面ひずみ状態を考えると、2次元面内定常波動場の支配方程式は、次のNavierの式で表される。

$$(k_s^2/k_p^2-1)u_{\beta,\alpha\beta}+u_{\alpha,\beta\beta}+k_s^2u_{\alpha}=0, \quad \alpha, \beta=1,2 \quad (1)$$

ここに、 $k_s=\omega/c_s$, $k_p=\omega/c_p$ は、それぞれP波、SV波の波数である。このような2次元定常波動場の汎関数は、Fu-Washizuの定理³⁾より次のように表される。

$$\pi=1/2 \int_S (mu_{\alpha,\alpha}u_{\beta,\beta}+u_{\alpha,\beta}u_{\beta,\alpha}+u_{\beta,\alpha}u_{\alpha,\beta}-k_s^2u_{\alpha}^2)ds - \int_{C_1} g_{\alpha}(u_{\alpha}-\bar{u}_{\alpha})dc - \int_{C_2} u_{\alpha}\bar{g}_{\alpha}dc \quad (2)$$

$$u_{\alpha}=\bar{u}_{\alpha} \text{ on } C_1, \quad t_{\alpha}=\bar{t}_{\alpha} \text{ on } C_2$$

ここに、積分記号の添字Sは領域積分を意味し、また、 C_1 , C_2 は、それぞれ変位境界および応力境界、 $m=\lambda/\mu$, $g_{\alpha}=1/\mu t_{\alpha}$ である。

このとき、FEM領域Aに対する汎関数 π_f は、式(2)より次のように与えられる。

$$\pi_f=1/2 \int_A (mu_{\alpha,\alpha}u_{\beta,\beta}+u_{\alpha,\beta}u_{\beta,\alpha}+u_{\beta,\alpha}u_{\alpha,\beta}-k_s^2u_{\alpha}^2)ds - \int_{C_2} u_{\alpha}\bar{g}_{\alpha}dc \quad (3)$$

FEM領域の各節点での値を $u_{\alpha n}$ 、内挿関数を N_n とし、各要素内の値が総和規約を用いて $u_{\alpha}=N_n u_{\alpha n}$ で表されるものとして式(3)の変分をとり停留化すると次式を得る。

$$\int_A (mN_{i,\alpha}u_{\alpha,\gamma}+N_{i,\gamma}u_{\alpha,\alpha}+N_{i,\gamma}u_{\alpha,\gamma}-k_s^2N_i u_{\alpha})ds - \int_{C_2} N_i \bar{g}_{\alpha}dc = 0 \quad (4)$$

これをマトリックス表示すると次のようになる。

$$K_f u = F_f, \quad F_f = \int N_i \bar{g}_{\alpha}dc \quad (5)$$

次に、BEM領域Dについても同様にして、その汎関数 π_b は式(2)にGaussの発散定理を用いることにより式(6)のように得られる。

$$\pi_b=1/2 \int_C u_{\alpha}g_{\alpha}dc - \int_{C_1} g_{\alpha}(u_{\alpha}-\bar{u}_{\alpha})dc - \int_{C_2} u_{\alpha}\bar{g}_{\alpha}dc, \quad C=C_1+C_2 \quad (6)$$

ここで、BEM領域を間接法によって定式化するものとする、波動場は、

$$u_{\alpha}=\int_C G_{\alpha\beta}f_{\beta}dc, \quad t_{\alpha}=1/2f_{\alpha}+\int_C T_{\alpha\beta}f_{\beta}dc \quad (7)$$

と表される。ただし、 G は基本解、 f は積分密度である。この式(7)を $u_{\alpha i}=C_{\alpha\beta i j}f_{\beta j}$ および $g_{\alpha i}=D_{\alpha\beta i j}f_{\beta j}$ と離散化して式(6)に代入し、その変分をとり停留化すると次式が得られる。

$$A_{\alpha\beta i j}f_{\beta j}+B_{\alpha\beta i j}\bar{u}_{\alpha j}-R_{\beta i}=0 \quad (8)$$

$$B_{\alpha\beta i j}^t f_{\beta j}=0 \quad (9)$$

ただし、

$$A_{\alpha\beta i j}=-1/4 \sum_{p \in C_1} \{ (C_{\alpha\beta p i}+C_{\alpha\beta(p+1)i})D_{\alpha\beta p j}+(C_{\alpha\beta p j}+C_{\alpha\beta(p+1)j})D_{\alpha\beta p i} \} \Delta C_p$$

$$+1/4 \sum_{p \in C_2} \{ (C_{\alpha\beta p i}+C_{\alpha\beta(p+1)i})D_{\alpha\beta p j}+(C_{\alpha\beta p j}+C_{\alpha\beta(p+1)j})D_{\alpha\beta p i} \} \Delta C_p$$

$$B_{\alpha\beta i j}=1/2 \sum_{p \in C_1} (D_{\alpha\beta p i} \Delta C_p + D_{\alpha\beta(p-1)i} \Delta C_{p-1})$$

$$R_{\beta i}=1/2 \sum_{p \in C_2} (C_{\alpha\beta p i}+C_{\alpha\beta(p+1)i})\bar{g}_{\alpha} \Delta C_p$$

である。上式中、 B は B の転置マトリックスを意味し、また、 L , M は、それぞれ境界 C_1 , C_2 上の分割数である。式(8), (9)において積分密度 f を消去することにより、次のマトリックス表示式を得る。

$$K_b u_a = F_b, \quad K_b = -B^T A^{-1} B, \quad F_b = B^T A^{-1} R \quad (10)$$

FEM領域における式(5)とBEM領域の式(10)はまったく同形であるので、BEM領域を一要素として通常のFEMのプログラムに重ね合せると、

$$\begin{bmatrix} K_f & u_f \\ & K_b & u_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_f \\ F_f + F_b \end{bmatrix} \quad (11)$$

となる。従って、式(11)より散乱場の変位 u_s^I が求められると、全体場 u_a は、自由場の変位 u_a^0 と u_s^I の和として $u_a = u_a^0 + u_s^I$ のように得られる。

3. 数値解析例および考察

半無限領域では、自由場は入射場 u_a^I と反射場 u_a^R の和として得られ、入射波として平面波を仮定すると次のように与えられる。

$$\begin{aligned} u_a^I &= \phi, \alpha + e_{\alpha\beta} \phi, \beta \\ u_a^R &= \phi, \alpha + e_{\alpha\beta} \phi, \beta \\ \phi^I &= \exp\{i(x_1 k_p \sin \gamma + x_2 k_p \cos \gamma)\} \\ \phi^I &= \exp\{i(x_1 k_s \sin \gamma + x_2 k_s \cos \gamma)\} \\ \phi^R &= K_p \exp\{i(x_1 k_p \sin \gamma - x_2 k_p \cos \gamma)\} \\ \phi^R &= K_s \exp\{i(x_1 k_s \sin \gamma - x_2 k_s \cos \gamma)\} \end{aligned}$$

ここに、 ϕ は Lamé のポテンシャルであり、また、 γ は入射角、 K_p 、 K_s は反射係数、 $e_{\alpha\beta}$ は permutation symbol である。まず、精度を検討するために、均質な場合について本解法の結果と解析解⁴⁾を比較した (Fig. 1)。無限領域内の円孔に $\gamma = 90^\circ$ で SV 波が入射した場合であるが、よく一致していることがわかる。次に、不均質な場合の例として、コンクリートライニングが施された浅いトンネル周辺に開削の際に生じた緩み域がある場合について計算し、その結果を Fig. 2 に示す。これより、緩み域はトンネル壁面の地震応答を増幅するのに対し、コンクリートライニングはそれを抑制する効果のあることがわかる。

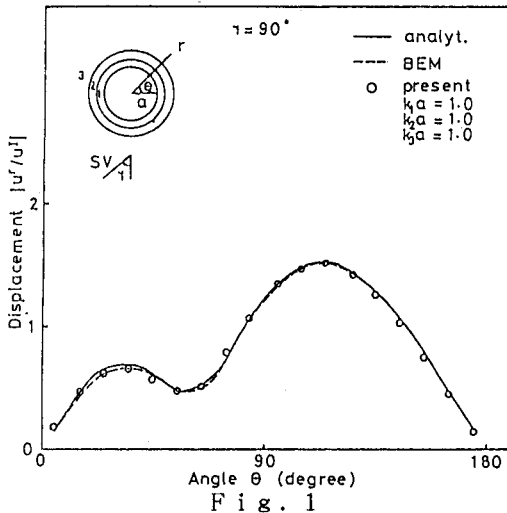


Fig. 1

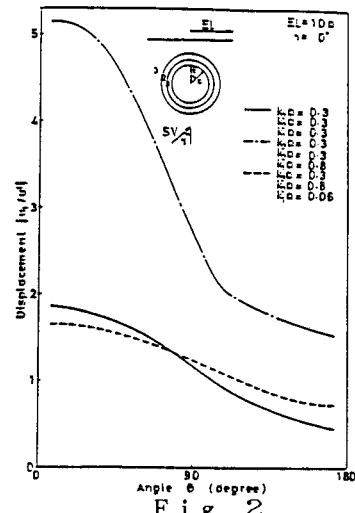


Fig. 2

(参考文献) 1) 大津政康: 変分原理に基づく結合解析, 境界要素法論文集, 第2巻, 1985. 2) 上杉真平, 大津政康: BE M-FEM 結合法による半無限領域における面外波動場の解析, 第41回土木学会年講, 1986. 3) K. Washizu: Variational methods in elasticity and plasticity, Pergamon Press, 1975. 4) C.C. Mow and L.J. Mente: Dynamic stress and displacements around cylindrical discontinuities due to plane harmonic shear waves, Jour. Appl. Mech., No. 30, 1963.