

鳥取大学工学部 正会員○松保重之

鳥取大学工学部 正会員 白木 渡

鳥取大学工学部 正会員 高岡宣善

1. まえがき 動的不安定現象は、静的不安定現象と異なりそれが1度生ずれば発散振幅振動を引き起こし、重大な事故に至るのが普通である。動的不安定問題を取り扱った研究は従来にも多くあるが、外乱を確定量として扱っているものがほとんどである。しかし、実際の外乱は時間の経過とともに不規則に変動する場合が普通である。本研究では、不規則外乱の作用を受ける系の動的安定性を確率論的に評価する方法について検討する。そして、その計算例として軸方向に不規則外乱が作用するような長柱の問題と、不規則風荷重を受ける吊橋のねじれフラッターの問題を取り挙げ、確率論的な安定性の解析を行う。具体的には、長柱の外乱を狭帯域過程、吊橋に作用する風速を白色雑音過程でそれぞれモデル化し、これらの外乱が作用する場合の系が二乗平均的に安定か否かを解析する。そして、系が不安定に陥る確率(不安定確率)の計算を行う。

2. 動的安定性の確率論的評価法 時間の経過とともに不規則に変動する外乱が系に作用すると、それによって引き起こされる応答量も時間の経過とともに不規則に変動する確率過程となる。このような確率過程応答が時間の経過とともに発散して不安定となるか否かを確率論的に評価するために、本研究では確率論的モーメントの安定性の概念を用いる。例えば、もし応答過程ベクトル $\tilde{\mathbf{X}}(t)$ が式(1)を満足するならば、系は二乗平均的に安定であると考えられる。式中、 $\mathbf{C}$ は要素が有限である正方行列、上付き添字 T は転置記号である。平均における安定性も同様に定義できる。動的安定性の

解析を行うためにはまず、系の支配方程式から応答の確率論的モーメントの式を導き、上述の定義に従う安定領域を図-1に示すように不規則外乱 $\tilde{P}(t)$ の平均 P_0 と分散 D_P との関係で示す。図中の P_0 と D_P との関係を示す実線は安定・不安定の臨界を与える $\tilde{P}$ の平均 $P_0=P_0^*$ と分散 $D_P=D_P^*$ を示している。したがって、 $\tilde{P}$ が正規分布 $N(P_0, \sqrt{D_P})$ に従うものと仮定すれば、安定・不安定の臨界状態においては $\tilde{P}$ は $N(P_0^*, \sqrt{D_P^*})$ に従っている。図-1の $f(p)$ は $\tilde{P}$ の確率密度関数を示す。二乗平均の意味から考えると、平均

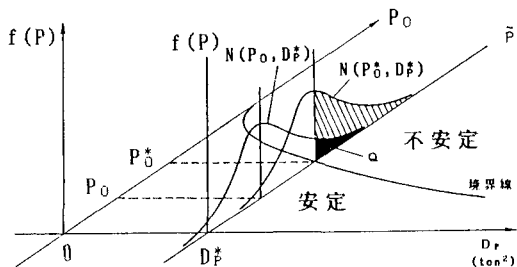


図-1

P_0^* , 分散 D_P^* の外乱 $\tilde{P}(t)$ が作用する系が安定か否かの確率はともに0.5であると解釈できる。したがって、系が安定から不安定に陥る確率を不安定確率 Q と定義すれば、式(2)のように考えることができる(図-1の斜線部分)。すなわち、 Q は臨界値 P_0^* からの上側超過確率として与えられ、平均 P_0 , 分散 D_P を有する場合の不安定確率 Q は式(3)で計算できる(図-1の黒い部分の面積)¹⁾。

3. 例1(長柱問題) 図-2に示すような不規則外力を軸方向に受ける長柱の問題は、例えば両端回転支持の場合、その動的たわみを $\tilde{y}(x, t) = \tilde{q}(t) \sin(\pi x / l)$ (t は時間)とおくと、確率微分方程式(4)で表わされる。ただし、 EI は柱の曲げ剛性、 m は柱の単位長さ当りの質量である。この場合、外力 $\tilde{P}(t)$ が平均 P_0 、分散 D_P を有する狭帯域確率過程であるとすると、式(5)により二乗

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E[\tilde{\mathbf{X}}(t) \tilde{\mathbf{X}}^T(t)] < \mathbf{C} \quad (1)$$

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_P}} \int_{P_0^*}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{(P - P_0^*)^2}{2D_P} \right\} dP = 0.5 \quad (2)$$

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_P}} \int_{P_0^*}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{(P - P_0)^2}{2D_P} \right\} dP \quad (3)$$

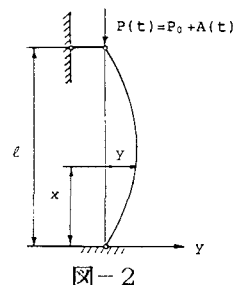


図-2

$$\frac{d^2 \tilde{q}}{dt^2} + \frac{1}{m} \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \left\{ EI \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 - \tilde{P}(t) \right\} \tilde{q} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\pi}{l} > \sqrt{\frac{\sqrt{D_P} + P_0}{EI}} \quad (5)$$

平均における安定領域が与えられることが、確率微分方程式の理論を援用することによって分る。種々の支持条件の柱についても同様な安定条件を導くことができる。断面寸法200×100mm、長さ $l=2.5\text{m}$ 、曲げ剛性 $EI=29.82\text{ ton}\cdot\text{m}^2$ のJIS規格I形鋼の柱について、式(3)の不安定確率 Q の計算を行った。 $Q=10^{-2}$ の時の安定領域を $\tilde{P}(t)$ の各分散 D_p に対して、横軸に細長比 λ 、縦軸に平均圧縮応力 $\sigma(=P_0/S)\text{ [kg/cm}^2\text{]}$ (S は柱断面積)をとって示すと図-3となる¹⁾。この図は、Eulerの屈居双曲線に対応する。同図においても、柱に生ずる σ が材料(SS41鋼材)の降伏点

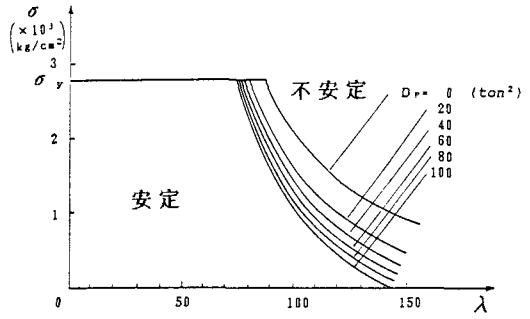


図-3

応力 $\sigma_y=2800\text{ kg/cm}^2$ より小さいと仮定した。図より、同一の λ でも D_p が大きいほど安定・不安定の臨界状態における σ が小さくなることが分る。なお、 $D_p=0$ の臨界線は、静的外力が作用する場合の結果と一致する。

4. 例2(ねじれフラッター問題)

図-4は、鉛直運動とねじれ運動に対し自由度を有する吊橋の横断面を示す。安定・不安定の臨界状態付近においては吊橋の挙動はねじれ運動によって支配されるので、解析はねじれ運動による応答の安定性のみに限定できるものと仮定する。この時、ねじれ運動に関する支配方程式は次式(6)

$$I(\ddot{\alpha} + 2\omega_\alpha \zeta_\alpha \dot{\alpha} + \omega_\alpha^2 \alpha) = \frac{1}{2} \rho (2B)^2 \frac{\partial C_M}{\partial \alpha} [X_\alpha \tilde{U}^2(t) \dot{\alpha} + \tilde{U}^2(t) \ddot{\alpha} + \int_{-\infty}^t \tilde{U}^2(\tau) (X_{M\alpha}(t-\tau) - 1) \frac{d\tilde{\alpha}(\tau)}{d\tau} d\tau] \quad (6)$$

$$X_{M\alpha}(t) = 1 + C_1 \exp(-\gamma_1 t) + C_2 \exp(-\gamma_2 t) \quad (7)$$

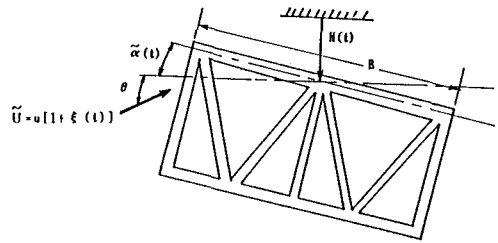


図-4

で与えられる。式中、 I は橋軸方向単位長さ当りの慣性モーメント、 $\tilde{\alpha}$ は不規則ねじれ角、 ζ_α は減衰比、 ω_α は固有振動数、 B は吊橋の幅員、 ρ は空気密度、 $\tilde{U}$ は不規則風速、 X_α 、 $\partial C_M / \partial \alpha$ は実験により決定される空力学定数である。また、 $X_{M\alpha}$ はインディシャル関数で式(7)で与えられる。 C_1 、 C_2 、 γ_1 、 γ_2 は定数である。風速 $\tilde{U}(t)$ を平均値 u とそのまわりの変動成分 $u \cdot \xi(t)$ とに分けて $\tilde{U}=u[1+\xi(t)]$ とおき、 $\xi(t)$ を白色雑音過程と仮定すると、確率微分方程式の理論を援用することによって安定条件を $\xi(t)$ のスペクトル密度 D_ξ と平均風速 u との関係で求めることができる²⁾。この D_ξ と u との関係は、風速 $\tilde{U}(t)$ を振動数 $-f_u$ から $+f_u$ まで一定のスペクトル密度 D_0 を有する有帯域白色雑音で仮定した場合の結果と変わらないものと仮定すると、この安定条件は $\tilde{U}$ の平均 u と分散 D_u との関係で示すことができる。そして、式(3)の不安定確率 Q を計算することがで

きる。所要の Q における安定領域を、横軸に D_u 、縦軸に u をとって描くと図-5となる。ただし、有帯域過程の f_u を $1(\text{c/s})$ とした。また、計算条件としてはBeliveauが一樣風速のときフラッター臨界風速 $U_{cr}=49.3\text{ m/s}$ を得た吊橋と同じ条件、すなわち $B=16.4\text{ m}$ 、 $\zeta_\alpha=0.01$ 、 $\omega_\alpha=0.74\pi\text{ rad/sec}$ 、 $I=8.98 \times 10^5\text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{m}$ 、 $\rho=1.226\text{ kg/m}^3$ 、 $X_\alpha=1.52$ 、 $\partial C_M / \partial \alpha=0.93$ 、 $C_1=1.64$ 、 $C_2=-51.61$ を用いている。図より、風速の平均値 u が一定の場合でも、風速の分散 D_u が大きくなるほど不安定確率 Q は大きくなること分る。

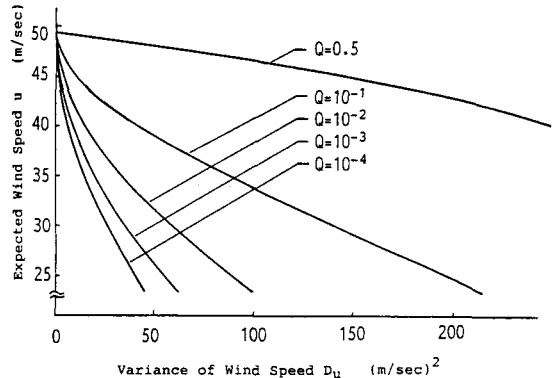


図-5

参考文献: 1) 高岡・白木・松保: 構造物…アプローチ, 鳥取大学工学部研究報告, Vol. 17, No. 1, pp. 71-79, 1986-11.

2) Y. K. Lin and S. T. Ariaratnam: Stability…Winds, Jour. of Struct. Mech., 8(1), pp. 1-15, 1980.